



Simulation ARMA de processus stochastiques à partir de leur densité spectrale de puissance

Emmanuel Friot

► To cite this version:

Emmanuel Friot. Simulation ARMA de processus stochastiques à partir de leur densité spectrale de puissance. [Rapport de recherche] Publications du LMA numéro 122, LMA. 1991, 59 p. hal-01365734

HAL Id: hal-01365734

<https://hal.science/hal-01365734>

Submitted on 13 Sep 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

PUBLICATIONS DU L.M.A.

n° 122 (avril 1991)

NOTES SCIENTIFIQUES

**SIMULATION ARMA
DE PROCESSUS STOCHASTIQUES
A PARTIR DE LEUR
DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE**

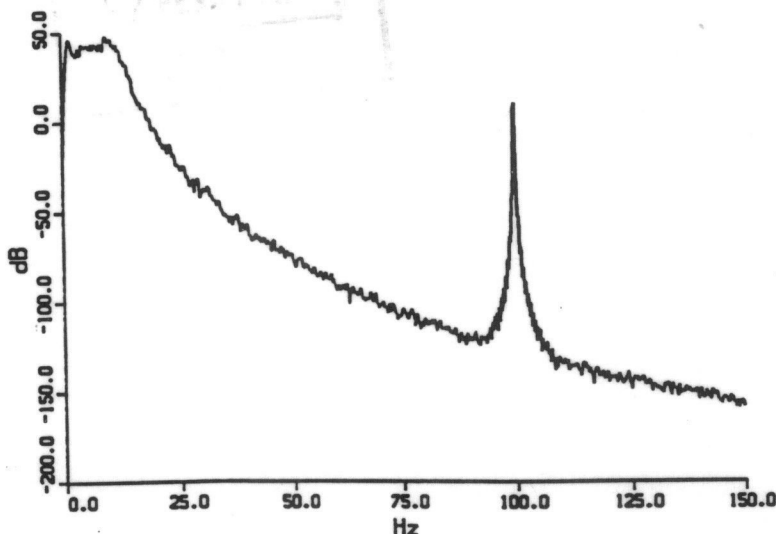
Emmanuel FRIOT

Figure de couverture :

Densité Spectrale de Puissance estimée de l'accélération verticale dans une automobile, à partir d'une simulation numérique où la route est modélisée par un processus ARMA(5,5)

PUBLICATIONS DU L.M.A.

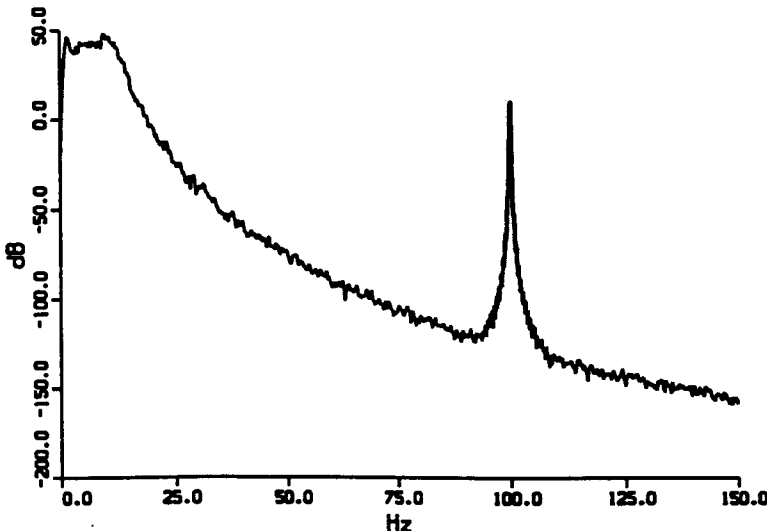
n° 122 (avril 1991)

NOTES SCIENTIFIQUES



SIMULATION ARMA DE PROCESSUS STOCHASTIQUES A PARTIR DE LEUR DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE

Emmanuel FRIOT

 PHYS
TH
TEC


Publication référencée dans la base PASCAL de l'INIST
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

G 82-106

SIMULATION ARMA DE PROCESSUS STOCHASTIQUES A PARTIR DE LEUR DENSITE SPECTRALE DE PUISSANCE

Résumé

Les méthodes constructives de résolution des problèmes aléatoires font largement appel à la simulation des trajectoires de processus stochastiques. Ce rapport présente plusieurs méthodes pour l'identification des paramètres d'un modèle ARMA discret qui représente au mieux un processus monodimensionnel physique donné, défini par sa seule densité spectrale de puissance. Si le processus cible modélise, par exemple, un "profil type" de route, le modèle ARMA obtenu permettra de simuler à volonté les sollicitations verticales appliquées à un véhicule en mouvement.

L'identification du modèle ARMA cherché est liée à la minimisation de critères quadratiques non linéaires et non convexes. On construit en conséquence le modèle par des chemins détournés, en procédant à la factorisation spectrale du processus initial. On considère notamment à cet effet une technique originale basée sur la décomposition en série de Laurent de la densité spectrale, où le recours à la FFT (Fast Fourier Transform) permet une résolution particulièrement rapide et précise. Plusieurs méthodes sont ensuite présentées pour l'obtention du modèle ARMA ; l'utilisation systématique de la FFT permet là-encore un traitement informatique simple et efficace des équations. On présentera les résultats obtenus pour différents spectres de départ et pour finir on s'intéressera aux conditions pratiques d'utilisation du modèle en évoquant en particulier les difficultés qui surgissent lorsque l'on souhaite simuler des trajectoires avec un pas de temps très inférieur aux temps caractéristiques des fluctuations du processus.

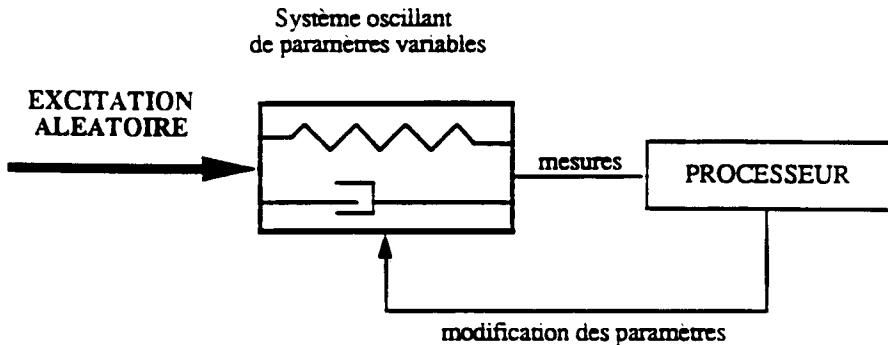


SOMMAIRE

Introduction	p. 7
1. Processus AR et ARMA	p. 9
1.1 Processus stochastiques stationnaires	p. 9
1.2 Processus AR	p. 9
1.3 Processus ARMA	p. 11
2. Formulation théorique des problèmes à résoudre	p. 13
2.1 Echantillonnage - critère initial	p. 13
2.2 Factorisation spectrale	p. 15
2.3 Critère final - démarche d'ensemble	p. 19
3. Construction numérique de la factorisation spectrale	p. 21
3.1 Minimisation de la part d'énergie due au bruit	p. 22
3.2 Calcul direct des coefficients de la factorisation	p. 26
3.3 Résultats comparés des deux méthodes	p. 27
4. Construction numérique du modèle ARMA	p. 29
4.1 Méthode ACM - itérations	p. 29
4.2 Méthode POM	p. 33
4.3 Algorithme de Marquardt	p. 35
4.4 Choix de l'ordre	p. 36
5. Exemples de données et de résultats	p. 39
5.1 Processus de référence utilisés	p. 39
5.2 Quelques courbes de résultats	p. 40
6. Simulation à des pas de temps très petits	p. 45
6.1 Limites des méthodes précédentes	p. 46
6.2 Passage au continu	p. 47
Conclusion	p. 53
Bibliographie	p. 55
Annexes	p. 57
A. Arbre des méthodes utilisées	p. 57
B. Caractéristiques numériques des méthodes utilisées	p. 59

INTRODUCTION

De nombreux systèmes mécaniques connaissent des vibrations entretenues par des sources d'excitations que l'on peut considérer comme aléatoires ; on peut citer pour fixer les idées l'exemple d'un véhicule en mouvement sollicité par les déformations de la chaussée. La mise au point d'algorithmes pour le contrôle actif ou semi-actif de telles vibrations aléatoires (par exemple le pilotage en temps réel d'un flux d'huile dans un amortisseur du véhicule) fait largement appel à des techniques de simulation numérique : on conçoit aisément qu'il est plus facile d'étudier les vibrations d'un modèle numérique que celles d'un système réel, que ce soit un camion, un avion soumis à la turbulence atmosphérique ou la croûte terrestre lors d'un tremblement de terre. Il faut pouvoir alors modéliser convenablement l'entrée aléatoire d'un système tel que celui représenté sur le schéma :



Un moyen simple de modéliser une excitation aléatoire consiste à en calculer globalement une trajectoire, c'est à dire une suite de valeurs conforme dans son ensemble aux propriétés statistiques du phénomène à représenter. Plusieurs techniques efficaces permettent une construction de ces trajectoires préalable à leur utilisation ; on trouvera une synthèse des différentes méthodes utilisées dans [1], les articles [7], [8], [9] et [10] exposent la méthode dite de "simulation par FFT" employée couramment. Malheureusement cette méthode ne permet de représenter que des excitations de durée donnée, et on ne peut interrompre puis relancer l'excitation sans en modifier les propriétés statistiques qui, par construction, ne sont contrôlées que si l'on considère la trajectoire dans son ensemble. Un autre point de vue consiste à déterminer un

modèle (par exemple un processus ARMA) dont les trajectoires soient calculables point par point en temps réel, ce qui en permet une utilisation bien plus souple. Le présent rapport étudie et compare plusieurs techniques pour calculer numériquement les paramètres d'un processus ARMA qui modélise convenablement un phénomène physique aléatoire monodimensionnel décrit par sa densité spectrale de puissance. Cette étude était initialement destinée à la construction de modèles simples pour le calcul récurrent de l'accélération verticale provoquée par la route dans une cabine de camion.

Le paragraphe 1 constitue une introduction élémentaire à la théorie des processus AR et ARMA ; l'essentiel du vocabulaire et des notions utilisés par la suite y est regroupé. Le paragraphe 2 esquisse les grandes lignes des différentes étapes de calcul, et montre pourquoi et comment l'on doit procéder à la factorisation spectrale du processus X . C'est une introduction aux paragraphes 3 à 6 qui traitent des aspects informatiques pratiques de la modélisation ARMA. On s'intéresse en premier lieu au paragraphe 3 à deux méthodes de factorisation spectrale d'un processus stochastique, l'une d'elle n'ayant jamais été mise en œuvre auparavant. Au paragraphe 4 on construit le modèle ARMA à partir de cette factorisation. Le paragraphe 5 présente les spectres utilisés pour tester et appliquer les différentes méthodes de construction de l'ARMA ; on y compare les densités spectrales données et celles des modèles ARMA obtenus. Enfin paragraphe 6 évoque les difficultés pratiques liées à des conditions d'utilisation "extrêmes" des modèles ; on y voit apparaître les limites des méthodes précédentes, et la nécessité dans certains cas de chercher de nouvelles solutions.

Signalons pour terminer que cette étude constituait le sujet d'un stage de fin d'étude à l'Ecole Centrale Paris ; elle ne pouvait en conséquence durer plus de trois mois . C'est la raison pour laquelle certaines questions soulevées tout au long de ce rapport restent sans réponse.

1. PROCESSUS AR ET ARMA

On pourra trouver une présentation plus complète et plus formelle des processus AR et ARMA par exemple dans [2] ; on se limitera ci-dessous aux caractères des processus AR et ARMA directement utilisés par la suite.

1.1 Processus stochastiques stationnaires

On rappelle avant tout qu'un processus stochastique est une famille de variables aléatoires indexées sur un ensemble quelconque. Pour nous un processus sera une grandeur physique prenant des valeurs aléatoires à tout instant (nous dirons processus à temps continu) où à intervalles de temps réguliers (processus à temps discret). Le processus sera dit stationnaire (en moyenne d'ordre 2) si espérance, variance et covariance se conservent dans le temps (les variables aléatoires issues de la physique que nous considérons admettrons toujours moyenne et variance). Ainsi peut-on par exemple décrire les irrégularités de la chaussée vues par un véhicule en mouvement à l'aide d'un processus stochastique stationnaire : on escompte autant de "bosses" que de "trous", pour une portion de route donnée les caractéristiques statistiques des déformations seront constantes. Enfin nous associerons au processus X une densité spectrale de puissance $S_X(f)$ dont l'existence sera supposée acquise. Si $R(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation du processus stationnaire (espérance du produit $X(t)X(t+\tau)$), S_X est la transformée de Fourier de R qui heuristiquement caractérise les "répétitions périodiques moyennes" de X , dans le domaine fréquentiel.

1.2 Processus AR

Un processus X à temps discret est un processus AR d'ordre p ("Autoregressive" Process) s'il vérifie la relation de récurrence :

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} = b_0 \varepsilon_t \quad (1.1)$$

où ε est un bruit blanc discret de variance 1 (les ε_t sont des variables aléatoires, par exemple gaussiennes centrées de variance 1, indépendantes ; ε admet une densité spectrale uniformément égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$). Heuristiquement l'équation (1.1) signifie que la valeur prise par X à la date t est une "conséquence" des p valeurs précédentes, perturbées par un "bruit" dont on connaît les propriétés statistiques. L'intervalle de temps entre deux valeurs successives prises par X est égal à 1.

Pour définir complètement le processus X , il est nécessaire d'adjoindre des "conditions initiales" à la relation (1.1). X n'est donc à priori pas du tout stationnaire, puisque l'on privilégie un instant initial. En fait on démontre (cf.[2]) que X est "asymptotiquement stationnaire en moyenne d'ordre 2" si les racines de l'équation :

$$x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p = 0 \quad (1.2)$$

sont toutes de module strictement inférieur à 1. Cette affirmation a une signification mathématique très précise ; nous considérerons simplement dans ce cas que les trajectoires d'un processus AR sont, excepté pour les premiers instants, celles d'un processus stationnaire. Nous parlerons notamment de la densité spectrale d'un processus AR au même titre que de celle d'un processus stationnaire (sous-entendu : en moyenne d'ordre 2). Le processus AR prend des valeurs à des dates séparées par des intervalles de temps de durée 1, son spectre est continu et périodique de période 1.

Les processus AR sont d'un grand intérêt pour le traitement numérique : tout ordinateur à vocation scientifique dispose d'un générateur de nombres aléatoires à support compact et de densité de probabilité constante sur ce compact, à partir desquels il est facile de construire la partie "bruit blanc" de l'équation (1.1). Etant donnée une valeur initiale de X , on pourra par conséquent simuler en temps réel une trajectoire du processus AR, en construisant les X_t par récurrence.

Enfin la relation (1.1) suggère, comme en automatique, d'envisager X (en tant que processus stationnaire) comme le résultat du passage de ε par un filtre linéaire de convolution dont la fonction de transfert est :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z + \dots + a_p} \quad (1.3)$$

La densité spectrale de puissance de X sur $[-1/2, 1/2]$ est alors donnée par la relation :

$$S_X(f) = H(z) H^*(z) S_\varepsilon(f) = H(z) H^*(z) \quad (1.4)$$

avec H^* complexe conjugué de $H(z)$, et $z = \exp(-i 2 \pi f)$ (qui décrit le cercle unité). On remarque bien : $S_X(f+1) = S_X(f)$; on peut prendre désormais $[-1/2, 1/2]$ comme intervalle principal pour étudier S_X .

1.3 Processus ARMA

Un processus X à temps discret est un processus ARMA(p,q) ("autoregressive/moving average" process) d'ordres p, q s'il vérifie une relation de récurrence du type :

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} \quad (1.5)$$

où ε est le bruit blanc discret de variance 1. Nous parlerons dans la suite de "partie AR" pour le premier membre, et de "partie MA" pour le second, un processus MA(q) étant un processus ARMA($p=0, q$).

La valeur du processus ARMA X à la date t est la "conséquence" des p précédentes valeurs de X et des perturbations enregistrées aux dates $t, t-1, \dots, t-q$. On peut à nouveau considérer que X est le résultat du filtrage du bruit blanc par un filtre linéaire de fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_q z^q}{1 + a_1 z + \dots + a_p z^p} \quad (1.6)$$

Cette fraction étant supposée irréductible, on montre que le processus ARMA est asymptotiquement stationnaire (toujours en moyenne d'ordre 2), indépendamment des conditions initiales, si l'équation :

$$x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p = 0$$

a toutes ses racines de module strictement inférieur à 1. Sans l'hypothèse "fraction irréductible", cette condition de stationnarité n'est pas forcément nécessaire puisque numérateur et dénominateur de H peuvent avoir des zéros communs sans influence sur le comportement du processus ARMA. Ainsi lorsque l'on détermine par le calcul un processus ARMA faut-il s'assurer que

les parties "AR" et "MA" n'ont pas de diviseurs communs avant de considérer la condition de stationnarité ci-dessus.

La densité spectrale de puissance du processus ARMA est donnée par la relation $S_X(f) = H(z)H^*(z)$, avec toujours $z = \exp(-i 2 \pi f)$ sur le cercle unité. On a bien sûr $S_X(f+1) = S_X(f)$. De plus le processus ARMA sera inversible si les racines de l'équation :

$$b_0x^q + b_1x^{q-1} + \dots + b_q = 0$$

sont de module inférieur à 1. Le processus de fonction de transfert H^{-1} est alors un processus ARMA stationnaire qui reconstruit le bruit blanc discret à partir de la densité spectrale S_X .

Enfin les trajectoires d'un processus ARMA sont, comme celles d'un processus AR, facilement calculables en temps réel à partir de la relation de récurrence (1.5).

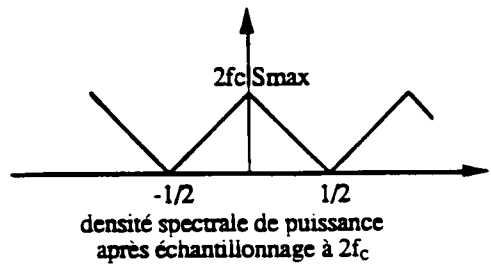
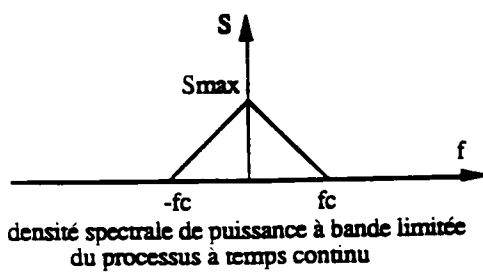
2. FORMULATION THEORIQUE DES PROBLEMES A RESOUDRE

Soit X un processus stationnaire dont on connaît la densité spectrale de puissance S_X . S_X peut être une expression analytique qui découle d'un modèle théorique (turbulence, mécanique des sols) ou être fournie par l'expérience (et dans ce cas on connaît S_X sur une bande de fréquences finie $[-f_c, f_c]$). On souhaite simuler des trajectoires de X , et pour cela on va chercher un modèle ARMA d'ordres p et q peu élevés dont la densité spectrale soit proche de S_X . Une fois les coefficients du modèle déterminés, il sera facile de construire des trajectoires du processus ARMA à l'aide des relations de récurrence précédentes ; on assimilera ces trajectoires à celles de X , ce qui aura un sens si seules les caractéristiques fréquentielles des trajectoires nous intéressent (dans le cas des processus gaussiens, la densité spectrale suffit d'ailleurs pour caractériser complètement un processus)

2.1 Echantillonnage - critère initial

Un processus ARMA est un processus à temps discret ; le théorème de Shannon (dont la version stochastique est analogue à la version déterministe) nous indique que le modèle ARMA ne pourra représenter un processus à temps continu que si le spectre de ce dernier est à support compact $[f_c, -f_c]$; la fréquence d'échantillonnage requise sera alors au minimum de $2f_c$ (fréquence de Nyquist). Les processus issus de la physique n'ont pas en général un spectre à support compact, mais leur énergie est finie et l'on peut tronquer leur spectre en contrôlant la fraction d'énergie perdue. Le pas de temps du processus ARMA cherché sera alors à priori celui du processus discret qui, d'après le théorème de Shannon, est un échantillonnage convenable de X , soit $1/2f_c$. On note par conséquent que la plus haute fréquence du spectre initial conditionne le pas de temps du modèle ARMA cherché.

On se ramène donc d'un processus à temps continu à un processus à temps discret, le spectre du processus échantillonné étant construit après filtrage des hautes fréquences de la densité du processus initial. Ce spectre sera une fonction continue de la fréquence réduite $f/2f_c$ (notée f dans les formules qui suivent) et sera périodique de période 1. Cette construction est résumée sur le schéma :



On considérera désormais des processus de spectre à support compact. Notre problème consiste à déterminer les coefficients (a_i) et (b_j) qui minimisent l'écart entre la densité spectrale S_X de X et celle d'un processus ARMA. Dans l'idée de simuler les trajectoires du processus ARMA on souhaite que les ordres p, q de ce dernier soit faibles, on peut par conséquent fixer les ordres à priori ; un choix ultérieur (après avoir calculé toutes les solutions d'ordres raisonnables) nous dira lesquels retenir.

L'intervalle $[-1/2, 1/2]$ étant pris comme intervalle principal, il s'agit donc de minimiser l'écart, p et q étant fixés :

$$J(a_i, b_j) = \int_{-1/2}^{+1/2} \left| S_X(f) - \left| \frac{b_0 + b_1 e^{-i2\pi f} + \dots + b_q e^{-i2\pi f q}}{1 + a_1 e^{-i2\pi f} + \dots + a_p e^{-i2\pi f p}} \right|^2 \right|^2 df$$

(2.1)

Un tel critère n'est pas une forme quadratique en a_i et b_j , et la fonction sous le signe somme n'est pas convexe ; on se trouve confronté à un épineux problème de minimisation non standard qu'il n'est pas facile de traiter tel quel.

2.2 Factorisation spectrale

Fonction de transfert causale

Le critère naturel (2.1) n'est donc pas aisément utilisable, et il est bien plus efficace de chercher un autre critère plutôt que de traiter le problème ainsi posé. Au lieu de s'intéresser directement à l'écart entre les densités spectrales, on va considérer l'écart entre les fonctions de transfert. On connaît en effet la fonction de transfert du processus ARMA (formule (1.6)). D'autre part S_X étant à valeurs positives, on peut aussi toujours trouver une fonction complexe G régulière telle que (il suffit de prendre par exemple $G(f) = (S_X(f))^{1/2}$) :

$$S_X(f) = |G(f)|^2 = G(f) G(f)^* \quad (2.2)$$

L'écriture (2.2) est appelée factorisation spectrale de S . G est périodique de période 1 et peut se développer en série de Fourier :

$$G(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g_k e^{-i2\pi k f} \quad (2.3)$$

On déduit de cette écriture, à l'inverse de ce que l'on a fait pour les processus AR et ARMA, que X peut être associé à l'équation de "réurrence" :

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} g_k \varepsilon_{t-k} \quad (2.4)$$

mais cette expression fait intervenir les valeurs futures de ε_t , et n'a par conséquent aucun sens physique ; il est en particulier difficile de concevoir des méthodes permettant d'identifier X à un processus "physique" (notamment AR ou ARMA) par l'intermédiaire de cette équation.

De plus la décomposition (2.2) n'est pas unique puisque l'on peut substituer à G la fonction $e^{i\alpha}G$ où α est une fonction à valeurs réelles quelconque. En revanche on montre (cf. [4]) que, le plus souvent, il existe une et une seule décomposition du type (2.2) où la fonction G est causale (avec g_0 réel positif), c'est à dire telles que seules les valeurs passées de ε interviennent dans l'équation (2.4). Dans ce cas l'équation (2.3) devient :

$$\boxed{G(f) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} g_k e^{-i2\pi k f}} \quad (2.5)$$

et l'on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} |g_k|^2 < +\infty$ avec g_0 réel positif.

On montre également que la fonction : $G(f) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} g_k z^k$
n'a pas des zéros de module inférieur à 1.

Dans l'écriture (2.5) G peut être lue comme étant la fonction de transfert d'un processus MA "d'ordre infini". Il est en particulier légitime de chercher une approximation de G en tronquant la série (2.5), ce qui revient à identifier les coefficients d'un modèle MA d'ordre fini.

En résumé il existe une et une seule fonction de transfert causale G telle que :

$$\boxed{S_X(f) = |G(f)|^2 = G(f) G(f)^*} \quad (2.6)$$

et G vérifie : $G(f) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} g_k e^{-i2\pi k f}$

ce qui correspond à : $X_t = \sum_{k=0}^{k=+\infty} g_k \varepsilon_{t-k}$

et ces écritures permettent de considérer X comme un processus MA d'ordre infini que l'on peut approcher par un MA d'ordre fini.

Condition de Paley-Wiener

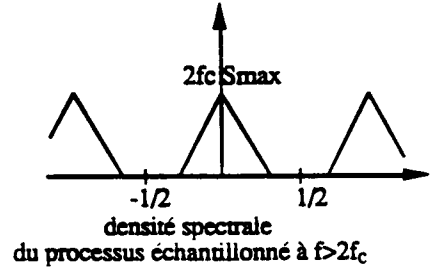
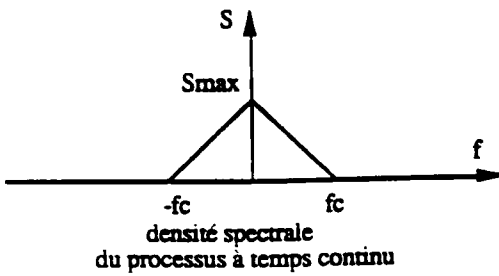
La factorisation spectrale ci-dessus (et les résultats qui en découlent) est mathématiquement garantie si la condition suivante, dite de Paley-Wiener, est vérifiée (cf. [4]) :

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \text{Log} [S_X(f)] \, df > -\infty \quad (2.7)$$

Par ailleurs pour un processus à temps continu Y cette condition s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Ln} S_Y(\omega)}{1+\omega^2} \, d\omega > -\infty, \quad \omega = 2\pi f$$

Un processus X vérifiant cette condition est dit physiquement réalisable (de même qu'en automatique on parle de matrice de transfert physiquement réalisable) puisque, comme nous venons de le voir, X est alors le résultat du filtrage linéaire causal du bruit blanc. Les spectres des processus que nous souhaitons simuler seront supposés satisfaire la condition de Paley-Wiener. Cette exigence est en général satisfaite pour les modèles issus de phénomènes physiques courants, si ce n'est dans le cas où la densité spectrale s'annule sur un intervalle entier. La condition de Paley-Wiener n'est alors, clairement, pas vérifiée. La densité d'un processus X à temps continu décroît en général lentement jusqu'à l'infini, sans s'annuler ; mais une fois filtrées les fréquences supérieures à f_c , le processus discret obtenu en échantillonnant X à une fréquence f_e supérieure à $2f_c$ verra, lui, sa densité spectrale s'annuler par intervalles (cf le schéma ci-dessous). On note par conséquent que la fréquence de simulation, obligatoirement supérieure à $2f_c$ pour espérer représenter un échantillonnage convenable de X (sans repliement de spectre), devra être exactement égale à $2f_c$ sans quoi les garde-fous mathématiques de la factorisation spectrale auront disparu (on verra plus loin que les algorithmes utilisés ne supporteraient pas de toute façon une telle situation).



Expression littérale des coefficients de la fonction de transfert

Outre la condition de Paley-Wiener (2.7), on suppose ici que $\text{Log}(S)$ est la restriction au cercle unité d'une fonction complexe $S(z)$ analytique sur un anneau contenant le cercle unité (ce qui exclut des comportements "pathologiques" que de toute façon on n'envisage pas avec les processus "physiques" considérés).

Sous cette condition on peut décomposer $\text{Log}(S)$ en série de Laurent au voisinage du cercle unité (la démarche ci-dessous est indiquée dans [2]) :

$$\text{Log } S(z) = \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} c_s z^s \quad (2.8)$$

Cette série de Laurent doit être identique à la série de Fourier de $\text{Log}(S)$ sur le cercle unité, par conséquent les c_s sont les coefficients de Fourier de $\text{Log}(S)$, S prise comme fonction de la fréquence. Dès lors :

$$c_s = \int_{-1/2}^{+1/2} \text{Log } S(f) e^{-i2\pi fs} df \quad (2.9)$$

$\text{Log}(S)$ étant à valeurs réelles, ses coefficients de Fourier vérifient : $c_s = c_{-s}$ (2.10). On peut par conséquent réécrire l'équation (2.9) :

$$\text{Log } S(z) = c_0/2 + \sum_{s=1}^{s=+\infty} c_s z^s + c_0/2 \sum_{s=1}^{s=+\infty} c_s z^{-s}$$

$$\text{et : } S(f) = \exp\left(c_0/2 + \sum_{s=1}^{s=+\infty} c_s z^s\right) \exp\left(c_0/2 + \sum_{s=1}^{s=+\infty} c_s z^{-s}\right) \quad (2.11)$$

En posant :

$$G(z) = \exp\left(c_0/2 + \sum_{s=1}^{s=+\infty} c_s z^s\right)$$

on constate que S est alors factorisée sous la forme : $S(f) = G(z) G^*(z)$

et G étant une exponentielle de puissances positives de z, son développement en série sera de la forme requise en (2.5) (ie G sera bien une fonction de transfert causale, correspondant à un processus MA d'ordre infini).

Sous les conditions données ci-dessus d'analyticité de Log(S), on peut même montrer (cf. [2]) que le développement MA infini est inversible : X est aussi associé à un développement AR infini. L'écriture :

$$X_t = \sum_{k=0}^{k=+\infty} g_k \varepsilon_{t-k}$$

peut être inversée en :

$$\sum_{k=0}^{k=+\infty} a_k X_{t-k} = \varepsilon_t \quad (2.12)$$

Il est par conséquent légitime de chercher une approximation de X sous la forme d'un processus AR d'ordre élevé mais fini, ce qui revient à considérer la série (2.12) tronquée.

2.3 Critère final - démarche d'ensemble

Nous supposons désormais acquise l'existence de la factorisation spectrale, ainsi que l'inversibilité du développement MA infini à laquelle elle est associée. La démarche pour construire le modèle ARMA consistera alors dans un premier temps à déterminer une factorisation spectrale approchée du processus X. Nous examinerons à cet effet deux techniques de calcul. Une

fois G obtenu, on pourra ensuite rechercher les coefficients du modèle ARMA en identifiant G à la fonction de transfert du modèle ARMA, c'est à dire en minimisant cette fois l'écart :

$$J(a_i, b_j) = \int_{-1/2}^{1/2} \left| G(e^{-i2\pi f}) - \frac{b_0 + b_1 e^{-i2\pi f} + \dots + b_q e^{-i2\pi f q}}{1 + a_1 e^{-i2\pi f} + \dots + a_p e^{-i2\pi f p}} \right|^2 df \quad (2.13)$$

que l'on écrira :

$$J(a_i, b_j) = \int_{-1/2}^{+1/2} \left| G - \frac{N}{D} \right|^2 df$$

N et D étant des polynômes en z .

Ce critère, encore non quadratique convexe, apparaît déjà comme bien plus simple à traiter que le précédent. On peut dès maintenant remarquer que les écarts $|G - N/D|$ et $|DG - N|$ ne sont pas étrangers l'un à l'autre, le dernier conduisant à un problème de minimisation quadratique convexe. Nous verrons là encore plusieurs techniques pour déterminer le modèle ARMA une fois la factorisation spectrale obtenue.

En résumé la détermination du modèle ARMA, avec pour donnée la densité spectrale S_X d'un processus à temps continu, va se faire suivant le schéma :

- 1) troncature de S_X (échantillonnage)
- 2) Factorisation spectrale de S (S version tronquée de S_X ramenée sur $[0,1]$)
- 3) Choix des ordres p, q du modèle ARMA
- 3) Détermination du modèle ARMA, retour éventuel en 2)
- 4) Choix définitif des ordres et du modèle correspondant

Nous allons détailler dans la suite les étapes 1) et 2) ; le tableau de l'annexe A fait la synthèse des différentes méthodes utilisées à cet effet. Nous présenterons ensuite les résultats comparés des différents procédés. Enfin nous évoquerons les difficultés pratiques d'utilisation du modèle et notamment le fonctionnement à un pas d'échantillonnage imposé.

3. CONSTRUCTION NUMERIQUE DE LA FACTORISATION SPECTRALE

Il s'agit maintenant de déterminer la factorisation spectrale d'un processus X. Si X est à temps continu, on tronque sa densité spectrale conformément au paragraphe (2.1), et l'on se ramène à un processus échantillonné à temps discret. La première méthode consiste à chercher un processus AR d'ordre élevé (ie de 20 à 200...) dont la densité spectrale de puissance approche au mieux celle de la version échantillonnée de X. Elle est d'utilisation standard, on pourra consulter par exemple [6] pour son application dans le cas des processus vectoriels et [12] pour certains résultats de convergence. La seconde méthode, proposée par R.Bouc, s'appuie sur l'expression littérale (2.11) de la factorisation spectrale, résultat théorique bien connu (utiliser pour montrer l' "inversibilité" du développement MA infini en un AR infini) mais qui n'avait semble-t-il jamais été exploité numériquement auparavant. Avant d'aborder ces deux méthodes en détail, il est nécessaire de rappeler en quelques mots ce qu'est une transformée de Fourier rapide (FFT), puisque nous formulerons la plupart de nos équations de façon à utiliser la FFT

La transformée de Fourier rapide

Il existe de nombreux algorithmes, rapides et précis, permettant le calcul de sommes du type :

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp \left(\frac{i2kl\pi}{N} \right), \quad l = 0, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

où les a_k sont des coefficients complexes.

Les ouvrages sur la FFT abondent, on pourra trouver par exemple dans [3] une vue d'ensemble des techniques de calcul utilisées. Le calcul "brutal" de sommes d'exponentielles du type (3.1) donne des résultats très imprécis même lorsque les coefficients a_k sont presque tous nuls. On a donc tout intérêt à utiliser la FFT dès que possible, c'est un outil efficace qui figure dans toute bibliothèque de programmes mathématiques. Enfin on peut noter l'identité qui permet d'utiliser la FFT aussi bien pour des transformations de Fourier "directes" qu' "inverses" :

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp \left(\frac{-i2kl\pi}{N} \right) = \left(\sum_{k=0}^{N-1} a_k^* \exp \left(\frac{i2kl\pi}{N} \right) \right)^* \quad (3.2)$$

où z^* désigne le complexe conjugué de z .

3.1 Première méthode : minimisation de la part d'énergie due au bruit

On souhaite, pour l'obtention effective de la factorisation spectrale, approcher X par un processus AR d'ordre élevé (troncature du développement AR infini (2.13)). On cherche par conséquent les coefficients (a_i) et b_0 qui conduisent, à partir du modèle :

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_p X_{t-p} = b_0 \epsilon_t$$

à une densité spectrale (calculée via la relation (1.4)) proche de la densité spectrale effective de X .

Un tel modèle décrira d'autant mieux le processus X que la part due au bruit est faible ; en effet l'évolution moyenne de X dans le temps respecte certains paramètres statistiques alors que par définition les valeurs successives de ϵ sont non corrélées. Plus la part du bruit blanc (qui représente le "hasard") sera faible, meilleurs seront les coefficients a_i puisqu'ils rendront mieux compte des relations "intimes" entre les X_t indépendamment des perturbations aléatoires. L'idée standard, telle que l'on peut la trouver exposée dans [6], consiste par conséquent à minimiser la part de l'énergie du modèle AR due au bruit blanc.

On a, conformément au paragraphe 2 (éq. 2.4) et sur $[-1/2, 1/2]$:

$$S_X(f) = b_0^2 \left| \frac{1}{1 + a_1 e^{-i2\pi f} + \dots + a_p e^{-i2\pi f p}} \right|^2 \quad (3.3)$$

$$\text{ou plutôt : } \left| 1 + a_1 e^{-i2\pi f} + \dots + a_p e^{-i2\pi f p} \right|^2 S_X(f) = b_0^2 \quad (3.4)$$

On va minimiser par conséquent la quantité :

$$J(a_i) = \int_{-1/2}^{1/2} \left| 1 + a_1 e^{-i2\pi f} + \dots + a_p e^{-i2\pi f p} \right|^2 S_X(f) df$$

(3.5)

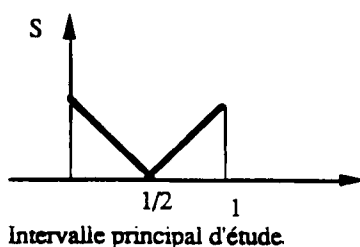
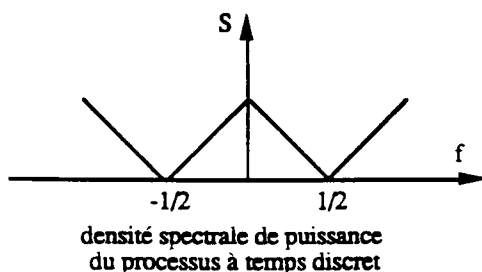
qui sera d'autant plus petite que les a_i permettent de bien corrélérer les X_t entre eux.

On remarque que le critère (3.5) ne nécessite effectivement pour être utilisé que la connaissance de la densité spectrale S .

Formulation du problème de minimisation

Le critère ci-dessus conduit à un problème de minimisation quadratique convexe standard ; c'est un problème typique de "moindres carrés". On va en détailler la résolution et écrire l'expression littérale des coefficients du système linéaire associé, de façon à faire apparaître les termes de type FFT. On sera confronté dans la suite à d'autres problèmes de minimisation très proches de celui-ci, nous allons en détailler la résolution une bonne fois pour toute.

Les différentes fonctions de la variable f que l'on utilise sont discrétisées en N points sur la grille de fréquence $[0,1]$. Le processus X est à valeurs réelles, sa densité spectrale qui est de période 1 est également paire. On utilise par conséquent la grille de fréquence $[0,1]$ en complétant S_X par symétrie sur $[1/2,1]$, à partir de sa donnée sur $[0,1/2]$ (cf schéma). Cette manipulation a pour but, comme on va le constater un peu plus loin, d'aboutir à des formules calculables par FFT.



On note dans la suite :

- $z = e^{-i2\pi k/N}$, N représentant le nombre de points utilisés pour discrétiser la bande de fréquence $[0,1]$; on notera $S(k) = S_X(k/N)$ pour $k = 0, \dots, N-1$
- $D(k) = 1 + a_1 z + \dots + a_p z^p$, $k = 0, \dots, N-1$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme sesquilinéaire positive telle que :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} S(k) f(k) g^*(k)$$

Avec ces notations le critère (3.5) à minimiser s'écrit, la somme sur les fréquences étant discrétisée sous la forme d'une somme de Riemann :

$$J(a_i) = \langle D, D \rangle \quad (3.6)$$

La condition de minimum s'obtient en écrivant la nullité des dérivées partielles de J relativement aux a_i :

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \langle D, \frac{\partial D}{\partial a_l} \rangle \right\} = 0, \quad l = 1, \dots, p \quad (3.7)$$

Or :

$$\frac{\partial D}{\partial a_l} = z^l \quad \text{et} \quad D(z) = 1 + \sum_{j=1}^p a_j z^j$$

Par conséquent (3.7) s'écrit en utilisant la sesquilinearité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^p a_j \langle z^j, z^l \rangle \right\} + \langle z^0, z^l \rangle = 0, \quad l = 1, \dots, p$$

ou encore :

$$\operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^p a_j \langle z^{j-l}, 1 \rangle \right\} = - \operatorname{Re} \left\{ \langle z^{-l}, 1 \rangle \right\}$$

$$l = 1, \dots, p \quad (3.8)$$

Les termes : $\langle z^m, 1 \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} S(k) \exp \left(\frac{i2kl\pi}{N} \right)$

sont alors calculables par FFT, précisément parce que l'on a considéré S sur $[0,1]$; on vérifie de plus qu'ils sont réels compte tenu de la périodicité/parité de S .

En résumé la minimisation du critère (3.5) discrétisé est équivalente à la résolution du système linéaire de dimension $(p \times p)$:

$$\boxed{A_{jl} a_j = b_l} \quad (3.9)$$

où les coefficients A_{jl} sont calculables par FFT.

Pour finir on peut remarquer que la matrice (A_{ij}) est symétrique, et que ses coefficients sont constants sur une même diagonale. Enfin un résultat classique (cf. [2]) indique que la fonction $R(\tau)$ est semi-définie positive, ce qui signifie que quels soient les dates t_1, \dots, t_n et les réels x_1, \dots, x_n on a :

$$\sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n R(t_r - t_s) x_r x_s \geq 0$$

On constate que la matrice (A_{ij}) est précisément la matrice associée à cette forme bilinéaire, puisque les $A_{ij} = \langle z^{j-i}, 1 \rangle$, obtenus par transformation de Fourier de S , sont les $R(t_j - t_i)$. Le système (3.9) est donc positif. Mais le caractère défini du système à résoudre n'est pas évident a priori ; intuitivement on conçoit bien que le problème de minimisation admet une solution unique, si ce n'est pour des processus très particuliers où l'approximation par un processus AR d'ordre donné poserait problème. Plus précisément on peut remarquer que, le processus X étant physiquement réalisable, il est possible de l'écrire sous la forme d'un AR infini (équation (2.12)). En fait nous considérons ici une troncature de ce développement infini dont la non-unicité ne peut être liée qu'à un ordre de la troncature trop faible ; si p est élevé il est raisonnable d'attendre une solution unique au problème de minimisation. Pour les cas considérés le système (3.9) s'est toujours avéré non singulier, nous n'avons par conséquent pas cherché à formaliser cette argumentation en terme de convergence de séries.

Il ne reste plus qu'à programmer l'assemblage et la résolution du système symétrique défini positif (3.9), ce qui se fait sans rencontrer de

difficultés particulières, pour obtenir les coefficients a_i . La relation (1.4) permet de déduire ensuite le coefficient b_0 :

$$b_0^2 = |D(k)|^2 S(k) \quad \text{pour tout } k=0, \dots, N-1.$$

On calcule par exemple b_0 à l'aide de la formule de moyenne sur les fréquences :

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |D(k)| S(k)^{1/2}$$

et l'on dispose du modèle AR dans sa totalité.

Il subsiste une ultime question quant à la validité de cette décomposition : le processus AR obtenu est-il stationnaire (condition (1.2)) ? On peut utiliser à cet effet le même argument que celui donné pour son unicité, lorsque l'ordre p est "assez élevé" on est en droit d'attendre la stationnarité du modèle puisque X est stationnaire. En pratique l'AR obtenu a toujours été stationnaire.

3.2 Seconde méthode : calcul direct des coefficients de la factorisation

Les résultats du paragraphe 3.2 et notamment l'expression littérale (2.11) permettent en fait l'obtention numérique effective de la factorisation spectrale, et cela de façon très simple. En effet l'intégrale (2.9) sur $[0,1]$:

$$c_s = \int_0^1 \text{Log } S(f) e^{-i2\pi fs} df$$

conduit par discrétisation en somme de Riemann à :

$$c_s = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \text{Log } S(k) e^{-i2\pi ks/N} df, \quad s = 0, \dots, N/2$$

et cette somme est typique de celles calculables par FFT : les $N/2$ coefficients c_s ($s > 0$) s'obtiendront facilement par FFT . On peut alors décomposer la série de Laurent de $\text{Log}(S)$ en deux termes comme en (2.11), et en posant :

$$G(z) = \exp \left(c_0/2 + \sum_{s=1}^{s=N/2} c_s z^s \right)$$

on aura $S = G G^*$, G fonction de transfert causale.

On a par conséquent obtenu directement une factorisation spectrale de S . Cette méthode extrêmement simple, qui découle du développement astucieux de $\log S$ en série de Laurent, conduit à la factorisation spectrale sans passer par la résolution d'un système linéaire ; l'utilisation de la FFT permet un calcul numérique facile des différents coefficients.

3.3 Résultats comparés des deux méthodes

Il est facile de tester la qualité de la factorisation spectrale : on reconstruit S à partir de la relation $S = G G^*$ et l'on compare les résultats obtenus à la densité spectrale S_X initiale. Nous ne présenterons pas de courbes à ce niveau car S est ici réobtenue de façon quasi-parfaite (notamment en regard des incertitudes qui apparaîtront lors du calcul numérique des étapes suivantes), et ce pour tous les processus testés. On pourra se référer au paragraphe 5 pour visualiser les spectres de référence utilisés. Typiquement, l'erreur relative sur S (discrétisée en 1024 points) est inférieure à 10^{-3} avec la première méthode (en prenant un développement AR d'ordre 50), et inférieure à 10^{-6} avec la seconde. On pouvait s'attendre à cette différence puisque dans ces conditions on "cale" G dans le premier cas à l'aide de 50 coefficients, alors que dans le second on utilise 512 coefficients.

Lorsque l'on diminue l'ordre de l'AR recherché par la première méthode, on constate une dégradation progressive de la qualité de G avec une erreur qui, pour l'AR "à deux pics" présenté au paragraphe 5, devient supérieure à 1% et croît rapidement au dessous de 30 coefficients. La qualité de la deuxième méthode est liée à la finesse de la discrétisation de l'intervalle des fréquences $[0,1]$ puisque l'algorithme FFT calcule autant de coefficients de Fourier que l'on dispose de valeurs de $S(k)$. Cela n'a par conséquent pas beaucoup de signification de diminuer N de façon importante, on observe néanmoins une dégradation nette des résultats au dessous de $N=50$. On utilisera indifféremment pour la suite des calculs l'une ou l'autre des deux procédures (avec un AR d'ordre 50 et N multiple de 512), sans observer au bout du compte de différences quant à la qualité des résultats finaux.

Enfin la seconde méthode, très simple à programmer, requiert des temps de calcul (de l'ordre de la seconde sur un microVax) dérisoires face à ceux de la première. Malheureusement, cette deuxième méthode ne s'applique pas à la factorisation spectrale des processus à valeurs vectorielles. En effet si A et B sont deux matrices, on a en général :

$$e^{AB} \neq e^{BA}$$

Il n'est par conséquent pas possible de scinder la série de Laurent en deux termes "symétriques" et la construction ci-dessus n'est plus applicable.

En conclusion la seconde méthode est simple à implanter et numériquement très performante mais elle n'est pas applicable aux processus vectoriels, contrairement à la première.

4. CONSTRUCTION NUMERIQUE DU MODELE ARMA

Une fois effectuée la factorisation spectrale du processus X, il nous faut en déduire le modèle ARMA à partir du critère introduit au paragraphe 3, appliqué à un processus à temps discret :

$$J(a_i, b_j) = \int_0^1 \left| G(e^{-i2\pi f}) - \frac{b_0 + b_1 e^{-i2\pi f} + \dots + b_q e^{-i2\pi f q}}{1 + a_1 e^{-i2\pi f} + \dots + a_p e^{-i2\pi f p}} \right|^2 df \quad (4.1)$$

les valeurs prises par G étant maintenant supposées connues.

Les deux premières méthodes que nous allons examiner utilisent une version "linéarisée" de ce critère. La troisième fera appel à l'algorithme de Marquardt qui permet de résoudre certains problèmes de minimisation non linéaires.

Nous écrirons plus simplement le critère ci-dessus sous la forme :

$$J(a_i, b_j) = \int_0^1 \left| G - \frac{N}{D} \right|^2 df \quad (4.2)$$

4.1 Méthode "ACM" - itérations

La méthode ACM (Auto Cross-correlations Matching procedure, terminologie utilisée dans [6] dans le cas des processus vectoriels) considère le critère linéaire suggéré par la réduction au même dénominateur du noyau du critère (4.2) :

$$J(a_i, b_j) = \int_0^1 |GD - N|^2 df$$

La version numérique discrétisée de ce critère que nous utiliserons en pratique s'écrit :

$$J(a_i, b_j) = \sum_{k=0}^{N-1} |G(k)D(k) - N(k)|^2 \quad (4.3)$$

On obtient alors un critère quadratique standard similaire à celui traité au paragraphe 3.1. Les conditions de minimum sont ici :

$$\frac{\partial J}{\partial a_l} = 0, \quad l = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad \frac{\partial J}{\partial b_l} = 0, \quad l = 0, \dots, q$$

On les exprime en introduisant cette fois-ci la forme sesquilineaire :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) g^*(k) \text{ et l'on aboutit rapidement aux égalités :}$$

$$\begin{aligned} \langle GD-N, -z^l \rangle &= 0, \quad l = 1, \dots, p \\ \text{et} \quad \langle GD-N, Gz^l \rangle &= 0, \quad l = 0, \dots, q \end{aligned} \quad \text{avec toujours } z = e^{-i2\pi k/N}$$

Enfin quelques manipulations (similaires à celles de 4.1 utilisant la sesquilinearité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$) conduisent au système linéaire d'ordre $(p+q+1)$ qui détermine les a_j et les b_j :

$$A_{lj} x_j = B_l \quad (4.4)$$

$$\text{avec } x_j = a_j, \quad j = 1, \dots, p \quad \text{et} \quad x_{p+1+j} = b_j, \quad j = 0, \dots, q$$

Les coefficients A_{lj} et B_l ont pour expression :

$$\begin{aligned} A_{lj} &= \text{Re}\{\langle GG^*z^{j-l}, 1 \rangle\} & l = 1, \dots, p \text{ et } j = 1, \dots, p \\ A_{lj} &= -\text{Re}\{\langle G^*z^{j-p-1-l}, 1 \rangle\} & l = 1, \dots, p \text{ et } j = p+1, \dots, p+q+1 \\ A_{lj} &= -\text{Re}\{\langle Gz^{j-l+p+1}, 1 \rangle\} & l = p+1, \dots, p+q+1 \text{ et } j = 1, \dots, p \\ A_{lj} &= \delta_{lj} N & l = p+1, \dots, p+q+1 \text{ et } j = p+1, \dots, p+q+1 \\ B_l &= -\text{Re}\{\langle GG^*z^{-l}, 1 \rangle\} & l = 1, \dots, p \\ B_l &= \text{Re}\{\langle Gz^{-l+p+1}, 1 \rangle\} & l = p+1, \dots, p+q+1 \end{aligned}$$

On n'a pas rigoureusement $S=GG^*$, par conséquent dans les expressions ci-dessus il ne serait pas consistant d'utiliser S au lieu de GG^* : il faut garder un même niveau d'approximation dans tous les termes.

Ces expressions montrent que les coefficients du système linéaire sont facilement calculables par FFT. On peut également montrer que la périodicité de G et la propriété $G^*(f)=G(-f)$ provoquent la symétrie de la matrice (A_{ij}) , et que les termes \langle, \rangle sont réels. Enfin l'un des blocs de la matrice (A_{ij}) est diagonal.

Nous ne disposons ici, à la différence du paragraphe 3.1, d'aucun argument immédiat pour affirmer l'existence et l'unicité de solution du système (4.4), ni pour affirmer la stationnarité du modèle obtenu, excepté pour le cas $q=0$ et p élevé qui est précisément celui du paragraphe 3.1. On pourra trouver dans [6] des conditions suffisantes d'existence et de stabilité théoriques du modèle ARMA, trop complexes pour en discuter ici. En pratique nous n'avons rencontré que deux situations "à problème". D'une part lorsque le processus X est lui-même un processus ARMA, il est clair qu'en multipliant les numérateur et dénominateur de sa fonction de transfert par un même polynôme on obtient un autre modèle ARMA de même spectre, avec éventuellement des pôles/zéros de module supérieur à 1. Dans ce cas le système à résoudre est théoriquement singulier si l'on recherche un ARMA d'ordres plus élevés que ceux du processus initial, et en plus certaines solutions sont instationnaires. Il convient alors de réduire les ordres du modèle ARMA cherché pour retrouver le "bon" processus. L'autre cas "à problèmes" sera étudié au paragraphe 6, et l'apparition de pôles instationnaires n'est un symptôme secondaire des difficultés organiques que nous évoquerons alors.

L'assemblage et la résolution numérique du système symétrique (4.4) se font sans difficulté, et l'on obtient le modèle ARMA cherché. L'expérience montre toute fois que le système (4.4) est mal conditionné (le rapport de sa plus grande valeur propre à de sa plus petite est très grand). L'analyse numérique (cf. par exemple [5]) nous apprend que la solution du système (bien que celui-ci soit de petite dimension $p+q+1 \leq 21$) sera par conséquent très sensible à une incertitude numérique sur les coefficients A_{ij} . Cette méthode conduit au bout du compte à de bons résultats : pour tous les processus tests utilisés, on peut trouver des ordres inférieurs à 10 pour lesquels la densité spectrale calculée à l'aide de la relation (1.4) redonne S_X avec une erreur relative toujours inférieure à 5%, égale en moyenne à 1% (cf. les courbes du paragraphe 6) :



$$\left| \frac{S_X - S_{ARMA}}{S_X} \right| \approx 1 \%$$

Itérations

Le critère linéaire (4.3) utilisé ci-dessus n'est pas rigoureusement équivalent au critère naturel (4.1). On va, d'une manière similaire à ce que l'on trouve dans [16] pour un problème de minimisation voisin, essayer d'améliorer les résultats donnés par la méthode ACM. Supposons obtenus N_0 et D_0 , première estimation des polynômes en z à identifier. Plutôt que de minimiser le critère (4.3) on va chercher une nouvelle estimation N_1 et D_1 en considérant le critère plus proche de (4.1) :

$$J(a_i, b_j) = \int_0^1 \left| \frac{GD_1 - N_1}{D_0} \right|^2 df$$

qui s'écrit aussi :

$$J(a_i, b_j) = \int_0^1 \frac{1}{|D_0|^2} |GD_1 - N_1|^2 df \quad (4.5)$$

Les valeurs de D_0 étant connues on se trouve face à un problème standard de minimisation avec poids. Le traitement des équations est exactement similaire à celui conduit à partir du critère (4.3), à ceci-près que la forme sesquilinéaire à introduire est cette fois :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{|D_0(k)|^2} f(k) g^*(k)$$

En utilisant cette forme, le critère (4.5) conduit à un système linéaire dont les coefficients s'écrivent exactement comme ceux du système (4.4). On obtient en résolvant ce système une nouvelle estimation N_1 et D_1 . On peut alors reprendre le raisonnement en substituant D_1 à D_0 , et déterminer une troisième estimation N_2 et D_2 , et ainsi de suite. Finalement on construit la procédure itérative suivante :

- 1) calcul de D_0 par la méthode ACM (ce qui revient à prendre des poids égaux à 1)
- 2) calcul des poids du critère (4.4)
- 3) détermination de l'estimation suivante
- 4) retour en 2)

Cet algorithme, extrêmement séduisant à priori, n'a pas conduit sur les exemples que nous avons considérés à de meilleurs résultats que la méthode ACM utilisée seule : on n'observe pas d'améliorations quant à la qualité des modèles obtenus itération après itération. La première estimation D_0 et N_0 étant déjà bonne, on peut supposer que le surcroît de calculs numériques dus aux itérations, lié au mauvais conditionnement du système (4.4), fait que l'on perd en précision ce que l'on gagne en raffinant la méthode. On ne peut s'appuyer de plus sur aucun argument mathématique permettant d'affirmer la convergence des itérations, le critère (4.1) ne présentant aucune propriété de convexité. A vrai dire on n'a jamais constaté de divergence nette des résultats aux cours des itérations, tout au plus une légère dérive des coefficients. En règle générale on peut plutôt parler d'une relative stabilité, les incertitudes numériques empêchant vraisemblablement toute velléité de convergence. La seule tentative pour établir l'efficacité de la méthode aurait nécessité la réécriture à chaque itération de la forme $\langle.,.\rangle$ sur une base de polynômes orthogonaux (cf [16]). Faute de temps nous n'avons pu programmer cette orthogonalisation ; on n'aurait de toute façon pas gagné beaucoup à cette manipulation puisque D_0 et N_0 constituent une bonne estimation du résultat cherché.

4.2 Méthode "POM"

La méthode POM (Power Order Matching procedure, terminologie utilisée dans [6]) consiste en un traitement différent du critère (4.3) :

$$J(a_i, b_j) = \sum_{k=0}^{N-1} |GD - N|^2$$

N et GD sont des fonctions de période 1, dont on souhaite qu'elles soit proches l'une de l'autre. On va poser à priori l'égalité de leurs $p+q+1$ premiers coefficients de Fourier. Cela revient à peu près à remplacer la sommation sur le domaine fréquentiel $[0,1]$ par une sommation sur le

domaine temporel (mais le fait de se restreindre à $p+q+1$ coefficients ne permet pas d'écrire immédiatement l'équivalence de ces deux points de vue).

On note $\hat{N}(l)$ et $\hat{GD}(l)$ les $l^{\text{ièmes}}$ coefficients de Fourier de N et GD . Le domaine fréquentiel étant discrétisé il vient :

$$1) \hat{GD}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k)D(k) e^{-i2kl\pi/N}, \quad l=0, \dots, p+q \quad (4.6)$$

par définition.

$$2) \hat{N}(l) = b_l, l=0, \dots, q \text{ et } \hat{N}(l) = 0, l=q+1, \dots, p+q \quad (4.7)$$

puisque $N(k) = \sum_{l=0}^q b_l e^{-i2kl\pi/N}$ est précisément une série de Fourier.

Enfin puisque :
$$D(k) = \sum_{l=0}^q b_l e^{-i2kl\pi/N}$$

l'identité $\hat{N}(l) = \hat{GD}(l)$ et (4.6) conduisent à :

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^p a_j e^{-i2kj\pi/N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{-i2kl\pi/N} \right) = - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{-i2kl\pi/N} \quad l = q+1, \dots, q+p \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^p a_j e^{-i2kj\pi/N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{-i2kl\pi/N} \right) + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} G(k) e^{-i2kl\pi/N} = b_l \quad l = 0, \dots, q \quad (4.9)$$

Ces écritures signifient que les a_j s'obtiennent par le système linéaire (pxp) (4.8) ; on en déduit ensuite les b_j à l'aide des relations (4.9). On n'ira pas plus loin dans l'écriture (assez lourde) des coefficients du système à résoudre, mais on constate déjà à partir des équations (4.8) que ces coefficients sont calculables par FFT, de même que les b_j une fois connus les a_j . Finalement on s'est ramené à partir du critère (4.3) à un système linéaire de dimensions inférieures à celles induites par la méthode ACM.

La programmation des écritures ci-dessus ne pose pas de problèmes particuliers, la FFT y joue là encore un tout premier rôle. Le système linéaire à résoudre n'est plus symétrique, l'expérience montre en revanche qu'il est

mieux conditionné que celui induit par la méthode ACM. Globalement la méthode conduit également à de bons résultats ; l'erreur relative entre la densité spectrale reconstituée par la formule (1.4) et S_X est du même ordre de grandeur que celle liée à la méthode ACM, pour des temps de calcul moindres puisque le système à résoudre est plus petit. Enfin on ne peut envisager des itérations du même type que celles élaborées avec la méthode ACM : la clef des calculs ci-dessus réside dans le fait que N apparaît comme une série de Fourier dont les coefficients sont les b_j , et cette propriété est perdue lorsque l'on introduit des poids.

4.3 Algorithme de Marquardt

Nous mentionnons pour finir l'algorithme de Marquardt, présenté dans [15], qui permet de résoudre certains problèmes de minimisation non linéaire. C'est une procédure itérative qui, lorsque l'on se trouve "loin" de la solution, est équivalente à une méthode de gradient et qui, lorsque l'on s'en rapproche, utilise une version linéarisée du critère. Cet algorithme s'applique en principe pour minimiser l'écart entre fonctions à valeur réelles, et n'est peut-être pas totalement adéquat au traitement de fonctions complexes. On ne présentera pas ici l'algorithme de façon détaillée : on peut se référer à [15] où les calculs sont menés dans leur totalité.

L'algorithme de Marquardt requiert une estimation initiale des paramètres à optimiser. Cette donnée joue un rôle fondamental pour la résolution du problème. Nous avons rencontré deux "modes de fonctionnement" typiques en fonction de l'estimation fournie au programme :

1) lorsque l'on part d'une "bonne" estimation des paramètres (ie 1,4 pour 1,5 etc...) l'algorithme retrouve la solution attendue mais avec une précision comparable à celles des méthodes POM ou ACM.

2) lorsque l'on donne une mauvaise estimation (cas de la solution inconnue a priori) il s'est avéré que l'algorithme ne trouve pas souvent de résultat convenable : il converge fréquemment vers un jeu de paramètres différent de celui donné par les autres méthodes associé à une valeur du critère nettement plus grande. Il est évident qu'un algorithme ne peut rendre convexe une fonction qui ne l'est que très localement, on ne trouve pas ici la bonne solution vraisemblablement pour des raisons de non-convexité.

Enfin le principe même de l'algorithme fait que celui-ci peut rester "stationnaire" sur un jeu de paramètres qui ne soit même pas un minimum. Il est donc difficile de choisir un "test d'arrêt" des itérations. Nous n'en dirons pas plus de cet algorithme qui, s'il n'a pas conduit à des résultats concluants, s'est avéré étonnamment performant pour d'autres problèmes de minimisation non linéaire avant d'être essayé ici (cf. notamment [17]).

4.4 Choix de l'ordre

Nous avons négligé jusqu'à maintenant le problème du choix de l'ordre de l'ARMA à rechercher. Il est difficile d'effectuer le choix des ordres du modèle à priori (cf. [2], [13] et [14]). En revanche il est tout à fait envisageable ici de calculer un éventail de modèles ARMA d'ordres peu élevés, puis de choisir à posteriori le plus représentatif de X. La densité spectrale des modèles ARMA étant connue (via la relation (1.4)) on peut utiliser cette fois la mesure naturelle de l'erreur, une fois le modèle ARMA d'ordres donnés obtenu :

$$\text{ERREUR} = \int_0^1 |S_X - S_{\text{ARMA}}|^2 df$$

qui s'écrit de façon discrète :

$$\text{ERREUR} = \sum_{k=0}^{N-1} |S(k) - S_{\text{ARMA}}(k)|^2 df$$

(4.10)

Parmi tous les modèles ARMA obtenus avec des ordres acceptables, on choisira celui associé à la plus petite erreur. Ce critère, indépendants de ceux utilisés pour la détermination des ARMA, permet de choisir simplement la meilleure solution.

Supposons maintenant, par exemple, qu'un ARMA(4,3) soit, de tous les modèles $1 \leq p \leq 10$, $0 \leq q \leq 10$, celui de plus petite erreur associée (4.10). Si l'on détermine un ARMA d'ordres supérieurs, on devrait

"logiquement" aboutir à un modèle dont les coefficients supplémentaires soient nuls et récupérer la même erreur.

ARMA(4,3) :

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_4 X_{t-4} = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_3 \varepsilon_{t-3}$$

ARMA ($4 < p \leq 10$, $3 < q \leq 10$) :

$$X_t + a_1 X_{t-1} + \dots + a_4 X_{t-4} + \dots + a_p X_{t-p} = b_0 \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_3 \varepsilon_{t-3} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

les coefficients a_5, \dots, a_p et b_4, \dots, b_q "devraient" être nuls.

On n'a pas toujours observé la nullité des coefficients "inutiles". Deux types de situation se sont présentés.

D'une part les coefficients supplémentaires étaient sinon nuls, du moins de l'ordre de grandeur des erreurs caractéristiques des coefficients. Cette situation rassurante pour l'esprit n'était pourtant pas la seule. Il faut noter que dans notre exemple l'ARMA(4,3) pouvait lui-même être une version longue d'un ARMA plus court, complété avec des coefficients presque nuls. Il est arrivé que, prenant pour donnée X un AR(2), le programme ait proposé pour solution au lieu d'un AR(2) un AR(4) : les 2 premiers coefficients de cet AR(4) étaient proches de ceux attendus, les 2 autres étaient très petits, mais le programme préférerait cet AR(4) à son estimation AR(2) (qui, heureusement, était néanmoins presque aussi bonne vis à vis du critère (4.10)). Un tel phénomène s'explique facilement : le critère (4.10) intervient au-delà des incertitudes numériques apparues lors de la détermination du modèle ARMA, il choisit objectivement le modèle vis à vis des densités spectrales. On peut tout à fait imaginer que des coefficients supplémentaires, presque nuls, viennent corriger les incertitudes sur les calculs. De plus la minimisation qui permet la détermination du modèle à ordre fixé ne porte pas sur (4.10) mais sur un critère "linéarisé". Dans notre exemple il est d'ailleurs possible que l'AR(2) minimise "mieux" que l'AR(4) un critère tel (4.3). Au bout du compte le critère (4.10) permet un choix rigoureux de l'ordre dans toutes les situations, y compris lorsque l'on croit connaître le "bon" ordre à priori.

Nous avons déjà évoqué au paragraphe 5.1 l'apparition possible de pôles et zéros "parasites". Etant donnée la fonction de transfert :

$$H = \frac{b_0 + b_1 e^{-i2\pi f} + \dots + b_q e^{-i2\pi f q}}{1 + a_1 e^{-i2\pi f} + \dots + a_p e^{-i2\pi f p}}$$

on obtient en multipliant haut et bas par $(\alpha - e^{-i2\pi f})$ une nouvelle fonction de transfert associée à un modèle ARMA d'ordres supérieurs. Si α est de module supérieur à 1, cet ARMA sera instationnaire. Lorsque le processus à modéliser était lui-même un ARMA, on a rencontré presque à tout coup l'apparition de pôles et zéros redondants en augmentant les ordres de recherche ; parfois ces pôles étaient instationnaires, parfois leur présence permettait d'améliorer le critère (4.10) comme expliqué avec l'exemple de l'AR(2) (les systèmes à résoudre étaient dans ce cas théoriquement singulier mais cela n'apparaissait pas numériquement compte-tenu des incertitudes sur les coefficients). Il a été par conséquent nécessaire d'adjoindre au critère (4.10) une vérification de stationnarité des pôles. Dès lors le programme éliminait "seul" les ordres pour lesquels se rencontraient des pôles indésirables.

Par conséquent le critère (4.10) associé à la vérification de stationnarité des pôles a permis une sélection systématique des bons ordres et des modèles correspondants. Le modèle ARMA cherché est désormais obtenu en entier.

5. EXEMPLES DE DONNEES ET DE RESULTATS

On pourra se reporter au schéma de l'annexe A pour une vue d'ensemble des différentes techniques de calcul utilisées ; le tableau de l'annexe B résume leurs principales caractéristiques numériques.

5.1 Processus de référence utilisés

Les méthodes des paragraphes 5 et 6 ont toutes été testées puis appliquées à partir de deux types de densité spectrales : dans un premier temps on a utilisé comme donnée des densités spectrales de puissance associées à d'authentiques processus ARMA. On a considéré ensuite des densités spectrales associées à des processus "physiques", l'un d'eux modélisant notamment l'accélération verticale d'une cabine de camion excitée par les déformations de la chaussée.

ARMA à deux pics

Les processus ARMA se prêtaient tout à fait au test du comportement des algorithmes précédents. D'une part on sait exactement à quels coefficients devraient aboutir le programme, et l'on peut jouer sur les ordres des modèles cherchés en connaissant à priori le "bon" ordre. En outre on connaît l'expression analytique de la fonction de transfert H des processus ARMA (fraction en z , cf.(1.6)), et il est facile d'imposer la "forme" de la densité spectrale en plaçant judicieusement les pôles de H . Si l'on prend par exemple pour pôle $z_0 = 0,99 e^{i2\pi \alpha}$, il est clair que la densité spectrale de puissance de l'ARMA aura un "pic" en $f=\alpha$. On peut ainsi élargir ou accentuer à volonté la position des pics en jouant sur un petit nombre de coefficients. Un exemple typique est constitué par le processus AR(4) :

$$X_t - 2,7607 X_{t-1} + 3,806 X_{t-2} - 2,6535 X_{t-3} + 0,9238 X_{t-4} = \varepsilon_t \quad (5.1)$$

Ce processus est utilisé dans [2] pour tester plusieurs estimateurs des paramètres de l'ARMA, il y apparaît comme particulièrement sévère vis à vis des algorithmes d'estimation à partir de séries temporelles ; sa densité spectrale est représentée en figure 1 et présente deux pics très pointus.

Spectre "Camion"

Ce spectre est représenté en figure 2 pour le cas d'une mauvaise route. Il est associé aux expressions analytiques suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 0 \leq f \leq 1 & S_X = \mu 10^{(f-10.5)} \\
 1 \leq f \leq 10,5 & S_X = \mu \\
 10,5 \leq f & S_X = \mu 10^{-(f-10.5)/4}
 \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{l}
 \mu = 0,1 \text{ pour une bonne route} \\
 \mu = 0,5 \text{ pour une mauvaise route} \\
 \mu = 0,8 \text{ pour une très mauvaise route}
 \end{array}$$

On constate que cette densité spectrale est à support IR, et qu'elle vérifie la condition de Paley-Wiener. C'est précisément dans le but de simuler les trajectoires du processus associée à cette densité que l'on a effectué toute l'étude précédente.

5.2 Quelques courbes de résultats

- La figure 3 montre la densité du processus (5.1) modélisé par un ARMA(5,5) (en l'occurrence construit via séries de Laurent et méthode POM ; on verrait le même spectre si l'on utilisait la méthode ACM et/ou la factorisation spectrale par un AR (50)). De tous les ARMA ($p \leq 5$, $q \leq 5$) c'est celui qui donne le meilleur résultat, conformément au critère (4.10) pour le choix de l'ordre. Ce modèle ARMA a pour équation (à comparer à la relation (5.1)) :

$$\begin{aligned}
 X_t - 2,42706 X_{t-1} + 2,87580 X_{t-2} - 1,35525 X_{t-3} \\
 + 1,41221 \cdot 10^{-2} X_{t-4} + 0,31588 X_{t-5} \\
 = 0,99771 \epsilon_t + 0,33529 \epsilon_{t-1} - 4,2729 \cdot 10^{-3} \epsilon_{t-2} \\
 - 2,2906 \cdot 10^{-3} \epsilon_{t-3} - 1,0163 \cdot 10^{-3} \epsilon_{t-4} - 3,3142 \cdot 10^{-4} \epsilon_{t-5}
 \end{aligned}$$

fig.1: AR(4)

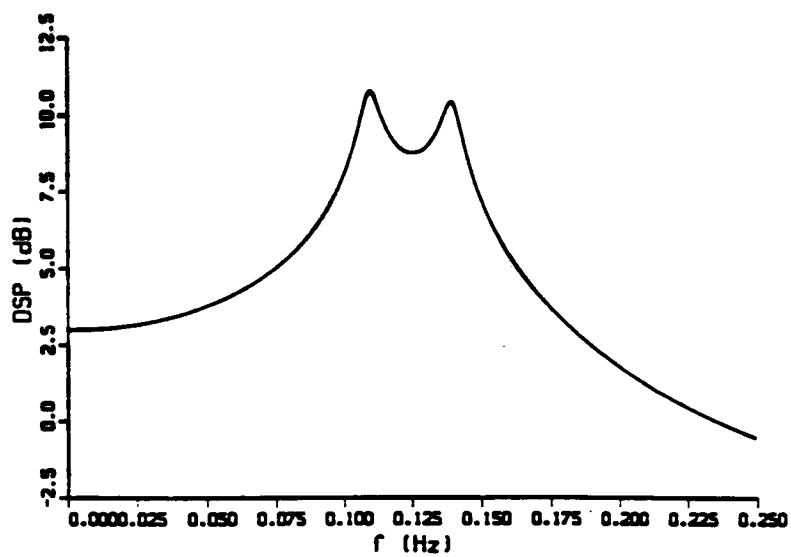


fig.2: Spectre 'Camion'

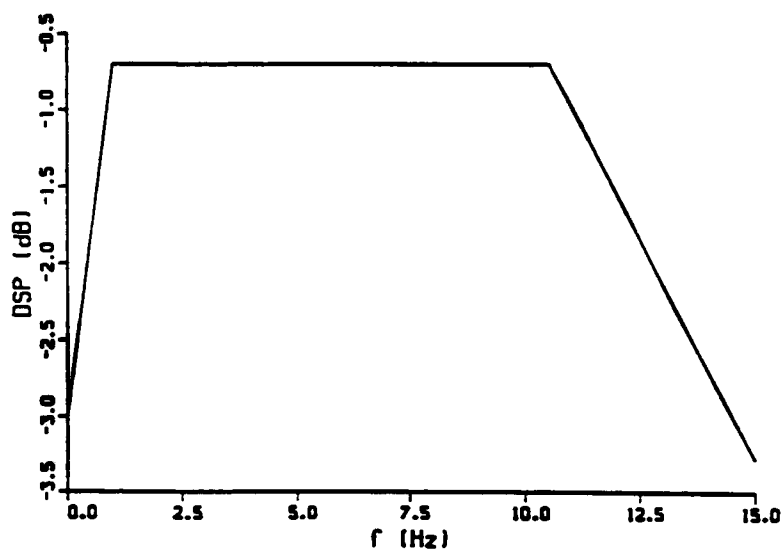


fig.3: ARMA(5,5)

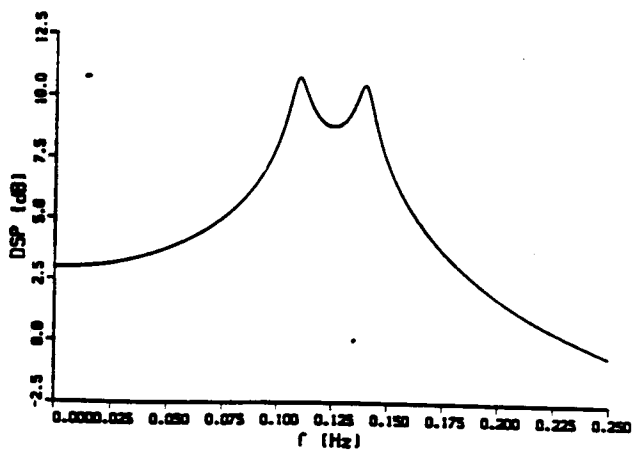


fig.4: ARMA(4,3)

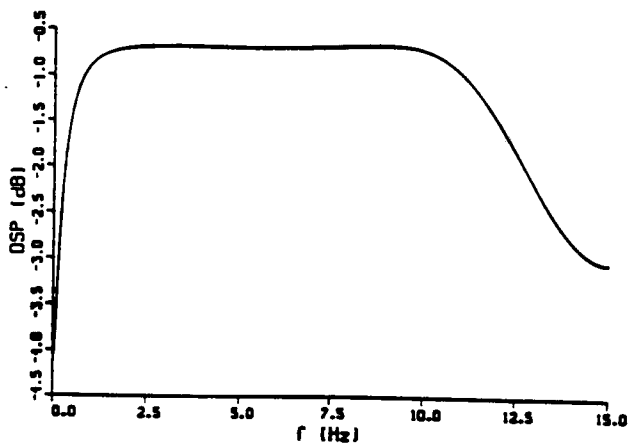


fig.5: ARMA(15,13)

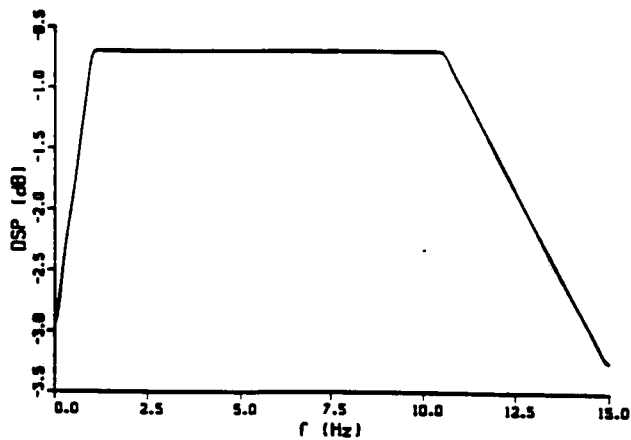


fig.6: Spectre de Kanai-Tajimi

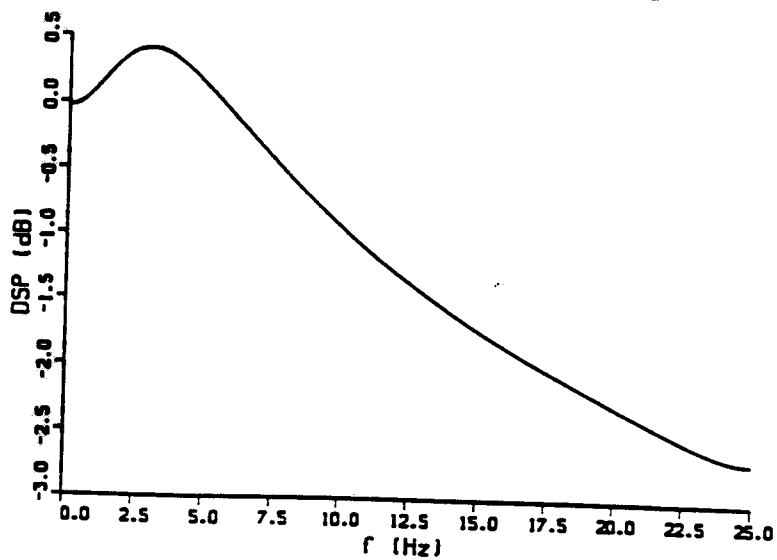
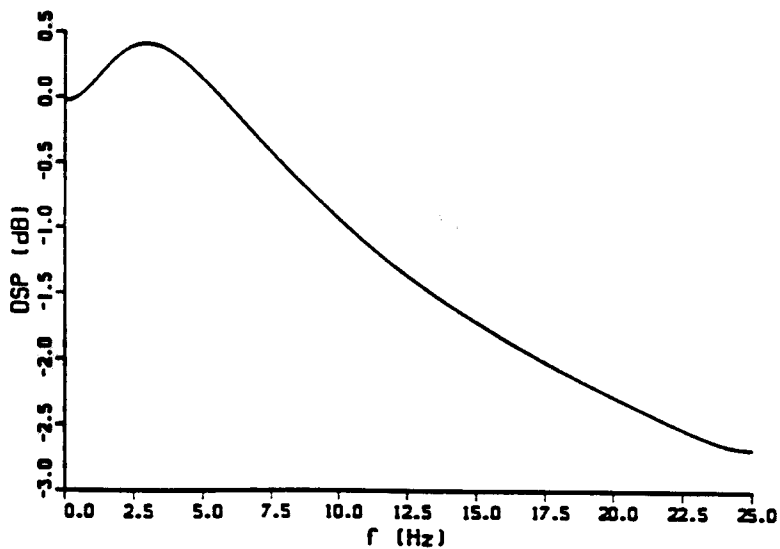


fig.7: ARMA(3,3)



Le processus à modéliser étant lui même un AR(4), on aurait pu s'attendre à obtenir comme meilleur modèle cet AR(4). Si l'on recherche spécifiquement un AR(4), on aboutit après calcul au modèle d'équation :

$$X_t - 2,76311 X_{t-1} + 3,80864 X_{t-2} - 2,64470 X_{t-3} + 0,91387 X_{t-4} = 0,99771 \varepsilon_t$$

à comparer à l'équation initiale :

$$X_t - 2,7607 X_{t-1} + 3,806 X_{t-2} - 2,6535 X_{t-3} + 0,9238 X_{t-4} = \varepsilon_t$$

L'acuité des pics est telle (passage de la valeur 10^{-2} à 50000 sur une bande étroite) que la légère différence constatée entre les coefficients suffit pour que le modèle AR(4) soit moins bon ; le programme choisit tout à fait légitimement l'ARMA(5,5), à partir du critère (4.10).

- la figure 4 représente la densité spectrale d'un ARMA(4,3) qui modélise le spectre "Camion" tronqué à 15Hz (et donc simulé à 30Hz). On obtient déjà, avec des ordres très peu élevés, une allure générale convenable : le pallier 1-10,5 Hz est notamment bien reproduit. Ce modèle a pour équation :

$$X_t - 0,2000 X_{t-1} - 0,3792 X_{t-2} - 0,2515 X_{t-3} + 4,013.10^{-2} X_{t-4} = 2,170 \varepsilon_t + 0,1826 \varepsilon_{t-1} - 1,6442 \varepsilon_{t-2} - 0,6045 \varepsilon_{t-3}$$

- la figure 5 présente le spectre de l'ARMA(15,13) qui modélise le spectre "Camion" (tronqué à 15Hz). on retrouve les "coins" du spectre initial, l'erreur sur le pallier est inférieure à 1%. Pour une fréquence de simulation de 30 Hz, les méthodes précédentes conduisent par conséquent à de bons résultats.

- la figure 6 représente le spectre de Kanai-Tajimi utilisé en sismologie (cité dans [6]). Il a pour expression analytique :

$$S(\omega) = S_0 \frac{\omega_g^4 + 4 \mu \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4 \mu \omega_g^2 \omega^2}$$

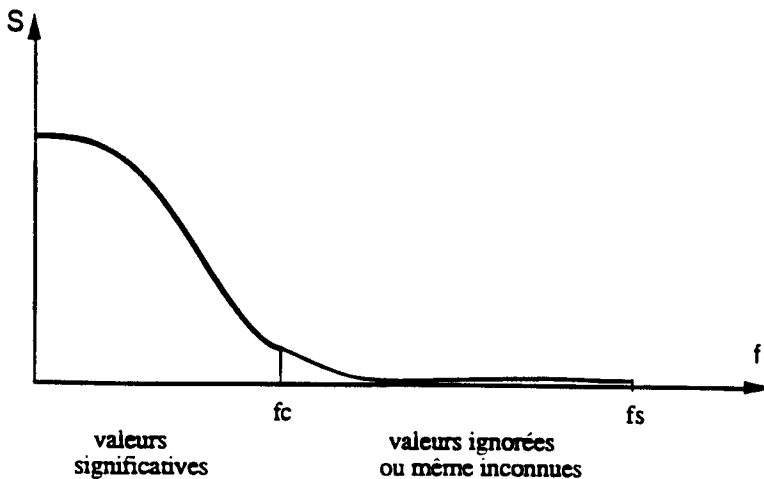
où les paramètres ω_g , μ et S_0 sont pris respectivement égaux à 8π , 0.8 et 1.

La figure 7 présente le spectre de l'ARMA(3,3) qui simule ce processus à une fréquence de 50Hz, des ordres peu élevés suffisent pour décrire convenablement le spectre initial.

6. SIMULATION A DES PAS DE TEMPS TRES PETITS

Les méthodes exposées précédemment donnent pleine satisfaction quand il s'agit de construire un modèle ARMA qui approche un processus de spectre donné, sans autres spécifications sur ce modèle que la donnée de bornes supérieures pour les ordres. Nous avons par la suite utilisé ces méthodes avec un large éventail de processus, sans rencontrer de difficultés particulières. En revanche dans des conditions d'utilisations peu naturelles du modèle quelques problèmes apparaissent.

Nous avons vu au paragraphe 3 que la fréquence f_c à laquelle on tronque le spectre S_X d'un processus à temps continu impose la fréquence de fonctionnement du modèle ARMA (égale à la fréquence de Nyquist $2f_c$). Réciproquement, si l'on souhaite, pour une application particulière, utiliser le modèle ARMA à un pas de temps Δt très petit donné, il est nécessaire de considérer S_X jusqu'à la fréquence $1/2\Delta t$, même si les seules valeurs significatives (ou même connues) prises par S_X le sont à des basses fréquences.



De plus, si l'on ne connaît pas les valeurs de S_X pour les hautes fréquences, la condition de Paley-Wiener (2.5) fait qu'il n'est pas possible de prolonger S_X par des valeurs nulles. On peut envisager deux types de démarches pour calculer le modèle ARMA dans de telles conditions : soit prolonger le spectre par des valeurs non nulles et utiliser sans modification les algorithmes précédents, soit tenter, à partir du modèle approchant X à une

basse fréquence, de déduire par d'autres voies le modèle à utiliser à une plus haute fréquence.

6.1 Limites des méthodes précédentes

Considérons un processus X que l'on souhaite modéliser par un ARMA associé à un pas de temps très petit. Le spectre de X à utiliser sera défini sur une très large bande $[0, f_c]$, supposons que seules les valeurs prises sur $[0, f_s]$ $f_s < f_c$, soient significatives (la part d'énergie sur $[f_c, +\infty[$ est négligeable). Les algorithmes précédents vont "caler" le modèle ARMA en considérant le spectre dans sa totalité. Par conséquent :

- si l'on utilise un nombre de points "habituel" pour discrétiser $[0, f_c]$, la bande $[0, f_s]$ sera médiocrement représentée par le processus ARMA

- il faut donc augmenter le nombre de points de discrétisation de façon à ce que la grille $[0, f_s]$ soit elle-même bien discrétisée. Mais lorsque $f_s \ll f_c$ le nombre de points à prendre en compte peut au total devenir considérable, voire inacceptable sur le plan numérique (temps de calcul trop longs). En plus presque tous les points de calcul utilisés dans ce cas seraient non significatifs.

Les difficultés ci-dessus sont encore plus vives lorsque le spectre est à priori inconnu (ou presque nul) pour les hautes fréquences. Il faut alors le compléter par des valeurs arbitraires non nulles, éventuellement introduire une pondération des différents critères sur la fréquence de façon à réduire la part d'arbitraire introduit en complétant le spectre... Aux difficultés numériques s'ajoute l'erreur de méthode liée au prolongement du spectre : on ne sait pas à priori quelle est l'influence de la nature du prolongement sur le résultat final ; l'expérience montre que des prolongements simples (droite constante ou décroissante, parabole, exponentielle) conduisent fréquemment à la construction de modèles ARMA instables ou insatisfaisants.

On peut alors remettre en cause les algorithmes précédents : il serait beaucoup plus cohérents de ne travailler qu'à partir de la seule bande utile $[0, f_s]$. On pourrait par exemple construire le modèle ARMA en ne considérant que la bande $[0, f_s]$, puis filtrer les valeurs indésirables de S_{ARMA} introduites sur $[f_s, f_c]$ (on peut montrer que coupler l'ARMA à un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle finie revient finalement à augmenter l'ordre de la partie MA du modèle). Malheureusement l'efficacité des algorithmes précédents tient pour une bonne part à l'utilisation de la FFT, ce qui suppose d'utiliser la grille de fréquence $[0, f_c]$ pour que les exponentielles à sommer

décrivent le cercle unité dans sa totalité. En effet la FFT "standard" calcule des sommes du type :

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp \left(\frac{i2kl\pi}{N} \right), l = 0, \dots, N-1$$

alors qu'en considérant une fenêtre plus étroite il s'avère que l'on obtient des sommes du type :

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k \exp \left(\frac{i2kl\pi}{M} \right), l = 0, \dots, N-1$$

où $M \gg N$ (M très grand). Comme indiqué au paragraphe 4, le calcul direct de telles sommes donne des résultats très imprécis. La seule tentative pour utiliser les mêmes formulations qu'auparavant en travaillant sur une fenêtre étroite aurait nécessité, pour le calcul de ces sommes, la programmation d'algorithmes similaires à ceux de FFT (on peut trouver dans [3] plusieurs algorithmes pour le calcul de ces FFT "modifiées"). Puis, une fois les modèles ARMA obtenus, il faudrait ensuite calculer le filtre passe-bas adéquat pour éliminer les fréquences indésirables.

Cette dernière approche nécessiterait un temps de travail supplémentaire incompatible avec la durée du stage. De plus l'utilisation d'un filtre passe-bas semble quelque peu artificielle et destinée à se raccrocher coûte que coûte aux méthodes précédentes ; on aboutirait certainement avec cette méthode à des résultats pratiques, mais sans garantie quant à la qualité de ces résultats (liée à celle du filtre). Enfin l'ordre de la partie MA serait artificiellement augmenté par rapport à celui de la partie AR par l'adjonction du filtre. C'est pourquoi l'on peut une approche différente, visant à déterminer directement le modèle destiné à un pas de temps petit à partir de celui calculé pour une fréquence bien adaptée au spectre initial (et nous avons vu que les modèles ARMA obtenus dans ce cas étaient satisfaisants).

6.2 Passage au continu

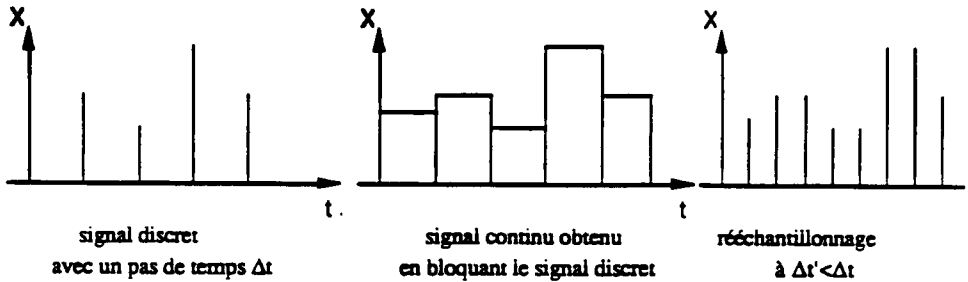
Interpolation des trajectoires

Considérons le processus ARMA calculé à partir de la bande significative $[0, f_c]$ et fonctionnant au pas de temps $1/2f_c$. Le théorème de

Shannon nous indique que l'on peut reconstruire les trajectoires du processus à temps continu de même spectre à partir de la formule :

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \frac{\sin \pi 2f_c(t-k2f_c)}{\pi 2f_c(t-k2f_c)}$$

En rééchantillonnant ces trajectoires à n'importe quel pas de temps inférieur à $1/2f_c$ on ne dénaturerait pas le contenu fréquentiel du signal. Mais la série ci-dessus, outre le fait que sa convergence soit lente, nécessite la trajectoire dans sa totalité et n'est pas utilisable en temps réel, alors que notre but premier était de simuler les trajectoires point par point et à volonté. Une autre possibilité consisterait à "bloquer" le signal pendant la durée $1/2f_c$ et à rééchantillonner ce signal bloqué :



Le fait de "bloquer" le signal modifie son contenu fréquentiel : en automatique on utilise en plus du bloqueur un filtre passe-bas de restitution pour obtenir le signal continu à partir du signal discret ; le rééchantillonnage du signal nécessiterait ici un filtrage vraiment efficace des fréquences ajoutées par le bloqueur, sous peine de récupérer au bout du compte un spectre replié. Il n'est donc pas possible d'interpoler en temps réel les trajectoires du "bon" processus ARMA sans recourir de nouveau à un filtre numérique.

Passage de l'AR(1) à la limite

Faute de pouvoir trouver un modèle ARMA convenable par les méthodes précédentes, ni de savoir interpoler simplement les trajectoires d'un ARMA fonctionnant à basse fréquence, nous allons chercher comment passer directement du modèle basse fréquence au modèle haute fréquence. Considérons pour commencer l'AR(1) :

$$X_t + a X_{t-1} = b \varepsilon_t$$

Les ε_t sont des variables aléatoires gaussiennes de variance 1, indépendantes. W désignant le processus de Wiener normalisé on a :

$$\varepsilon_t = \frac{W_t - W_{t-1}}{\sqrt{\Delta t}}$$

On peut alors réarranger l'équation du modèle et l'écrire sous la forme :

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{\Delta t} - \frac{1+a}{a\Delta t} X_t = -\frac{b}{a\sqrt{\Delta t}} \frac{W_t - W_{t-1}}{\Delta t} \quad (6.1)$$

Lorsque l'on construit des modèles ARMA pour des pas de temps de plus en plus petits, on peut effectuer un "passage à la limite" dans cette équation puisque, à contenu fréquentiel équivalent pour les basses fréquences, la suite de modèle ARMA devra converger vers un processus continu. Le passage à la limite dans l'équation ci-dessus pose néanmoins des problèmes théoriques, les termes d'accroissement n'ayant pas de limite probabiliste classique. Le bruit blanc discret ne peut pas, en particulier, être considéré comme la version discrète d'un bruit blanc continu : le bruit blanc continu, d'énergie "infinie", n'existe pas en temps que processus "physique". Toutefois la théorie des processus généralisés (cf [1]) permet de définir la limite du taux d'accroissement du Wiener (bruit blanc généralisé).

Par conséquent l'équation ci-dessus peut être approchée par, si Δt est déjà suffisamment petit pour que l'on confonde dérivée et taux d'accroissement, et avec $\Delta t' < \Delta t$:

$$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{\Delta t'} - \frac{1+a'}{a'\Delta t'} Y_{t'} = -\frac{b}{a'\sqrt{\Delta t}} \frac{W_t - W_{t-1}}{\Delta t'}$$

avec alors :

$$\boxed{\frac{1+a}{a\Delta t} \approx \frac{1+a'}{a'\Delta t'} \quad \text{et} \quad \frac{b}{a\sqrt{\Delta t}} \approx \frac{b'}{a'\sqrt{\Delta t'}}$$

On peut alors déduire les coefficients du nouvel AR(1) à partir de celui déterminé pour des plus basses fréquences :

$$a' = \frac{1}{1 - (1+a) \Delta t' / \Delta t}$$

$$\alpha \quad b' = b \frac{a' \sqrt{\Delta t'}}{a \sqrt{t}}$$

Il faut bien remarquer que le passage à la limite dans l'équation (6.1) n'est possible que si Δt est déjà petit, suffisamment pour que le terme $\frac{1+a}{a\Delta t}$ soit proche de sa valeur limite. Dans ce cas a est alors proche de -1 . Le raisonnement ci-dessus ne s'applique notamment pas si X est lui-même un AR(1) quelconque : X ne peut être considéré comme la version finement discrétisée d'un AR continu.

D'un point de vue spectral, si l'on part de l'AR continu :

$$\dot{X}(t) + \alpha X(t) = \beta \frac{dW}{dt}$$

on obtient en remplaçant la dérivée par un quotient différentiel l'équation :

$$X_t (1/\Delta t + \alpha) - 1/\Delta t X_{t-1} = \beta \sqrt{t} \epsilon_t$$

Le modèle continu est associé à la densité spectrale (cf. [2]) :

$$S(f) = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

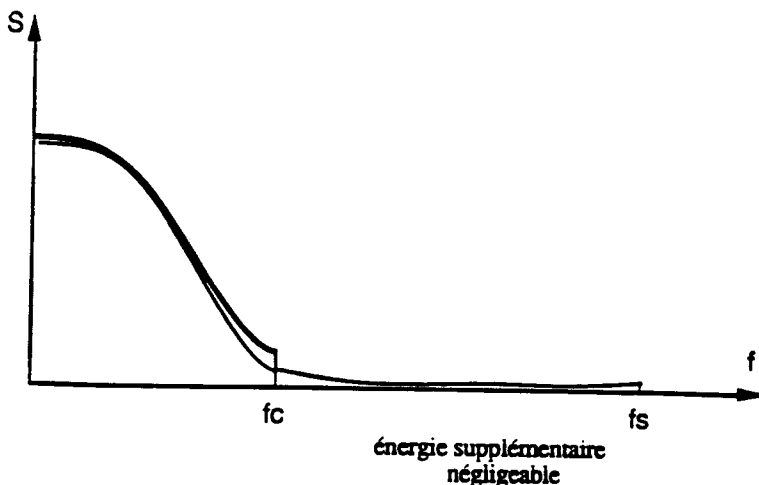
et le modèle discret à (équation (1.4) en fréquences non réduites) :

$$S(f) = \frac{\beta^2}{|1/\Delta t + \alpha - 1/\Delta t e^{-i\pi f/\Delta t}|^2}$$

On retrouve en développant ici l'exponentielle à l'ordre 1 l'expression de la densité spectrale du modèle continu. Le processus discret qui approche le processus continu aura donc, pour les basses fréquences, le même spectre que lui.

En résumé on peut, par l'intermédiaire d'un "passage au continu", construire à partir d'un AR(1) associé à un processus à temps continu un nouvel AR(1) : cet AR(1), associé au même processus continu fonctionnera à un pas de temps plus petit. Les spectres de ces deux AR prendront les mêmes valeurs aux basses fréquences. Dans ce cas simple on peut même montrer que les valeurs de la densité spectrale de puissance pour $f > f_c = 1/2\Delta t$ sont

majorées par la dernière valeur du spectre du premier processus : on ne rajoute pas une part d'énergie significative lorsque, en construisant le second AR, on élargit la bande des fréquences du spectre :



Extension à tous les modèles ARMA

Le raisonnement fait pour l'AR(1) peut se généraliser à tous les processus AR ; il suffit de réarranger les termes de l'AR en différences finies représentant les dérivées successives d'un AR continu. Et en transformant un AR via ce passage au continu, on conserve l'allure de leur densité spectrale aux basses fréquences sans introduire trop d'énergie pour les fréquences supérieures.

En revanche il est beaucoup plus délicat de considérer la partie MA comme étant la discrétisation d'une représentation continue et d'identifier ce modèle continu à un modèle discret. La même démarche que celle adoptée pour l'AR serait, par exemple, purement formelle puisqu'il faudrait donner un sens aux dérivées successives du processus de Wiener. En réalité le fait que la partie MA soit d'ordre q signifie qu'une perturbation apparaissant à la date t agit sur le système pendant la durée $q\Delta t$, si Δt est le pas de temps de l'ARMA. Le passage au continu d'un modèle ARMA($p, q > 0$) doit par conséquent intégrer le fait qu'une perturbation $\varepsilon(t)$ agit sur le système pendant une durée τ donnée. L'équation continue analogue à celle vérifiée par un ARMA sera donc de la forme :

$$X(p) + a_1 X(p-1) + \dots + a_{p-1} X' + a_p X = \int_0^{\tau} b(u) \varepsilon(t-u) du$$

Il convient, si l'on veut présenter un processus ARMA comme version échantillonnée d'un processus vérifiant cette équation, de discrétiser convenablement l'intégrale du second membre. L'ordre de la partie MA dépendra directement de cette discrétisation. Il faut inversement pouvoir reconstruire les paramètres $b(u)$ à partir des paramètres d'un MA discret d'ordre q donné. En fait il n'est pas du tout évident de concevoir un procédé reliant deux processus ARMA qui, avec les mêmes ordres, simulent un processus X avec des pas de temps différents. Il est vraisemblable qu'il existe un moyen simple de passer d'un ARMA à l'autre, moyen que nous n'avons pas su déterminer dans le cadre de cette étude.

En conclusion il est facile de relier entre elles les parties AR de deux processus ARMA, simulant un même processus avec des pas de temps différents, en "passant au continu". Il semble en revanche plus délicat de mettre deux parties MA en équivalence, aucun moyen de passage immédiat ne vient s'imposer au premier coup d'œil.

CONCLUSION

Nous avons vu comment identifier un modèle ARMA d'ordres peu élevés qui approche un processus X de densité spectrale donnée, avec l'intention d'utiliser ce processus ARMA pour simuler à volonté les trajectoires de X . Nous avons pu tester, outre les techniques habituelles, une méthode d'utilisation originale basée sur le développement de $\text{Log}(S)$ en série de Laurent. L'écriture des équations en terme de FFT a permis des traitements informatiques rapides et précis des différentes formulations, nous avons finalement obtenus des modèles ARMA dont la densité spectrale reproduit fidèlement celle du processus initial.

Ainsi a-t-on a pu examiner le comportement des procédures de résolution standard, la méthode plus originale développée au paragraphe 3.2 donnant pleine satisfaction. Finalement on a construit des modèles ARMA qui, pour des conditions d'utilisation "normales", s'avèrent tout à fait convenables. En revanche des difficultés inattendues ont surgi lorsque l'on a essayé, pour des applications très particulières, de déterminer des modèles ARMA dont le pas de temps soit très petit. Les problèmes intéressants qui apparaissent dans ce cas n'ont pas tous été résolus. On a notamment vu comment relier entre eux des processus AR, en les considérant comme représentants d'un même processus discret, mais l'on n'est pas parvenu, dans le cadre de cette étude menée en temps limité, à des résultats analogues pour des processus $\text{ARMA}(p,q>0)$. L'étude de cette question n'est donc pas tout à fait close, et il reste un domaine très particulier d'utilisation des modèles ARMA pour lequel les solutions ne sont pas pleinement satisfaisantes.

BIBLIOGRAPHIE

LIVRES

- [1] C.Soize, Processus stochastiques et méthodes de résolution des problèmes aléatoires, Cours de l'Ecole Centrale Paris (1987)
- [2] M.B.Priestley, Spectral analysis and time series, Academic Press (1981)
- [3] A.V.Oppenheim, R.W.Schafer, Digital signal processing, Prentice Hall (1975)
- [4] Guikhman, Skorohod, Introduction à la théorie des processus aléatoires, Editions Mir (1980)
- [5] E.Isaacson, H.B.Keller, Analysis of numerical methods, John Wiley & Sons (1966)

ARTICLES

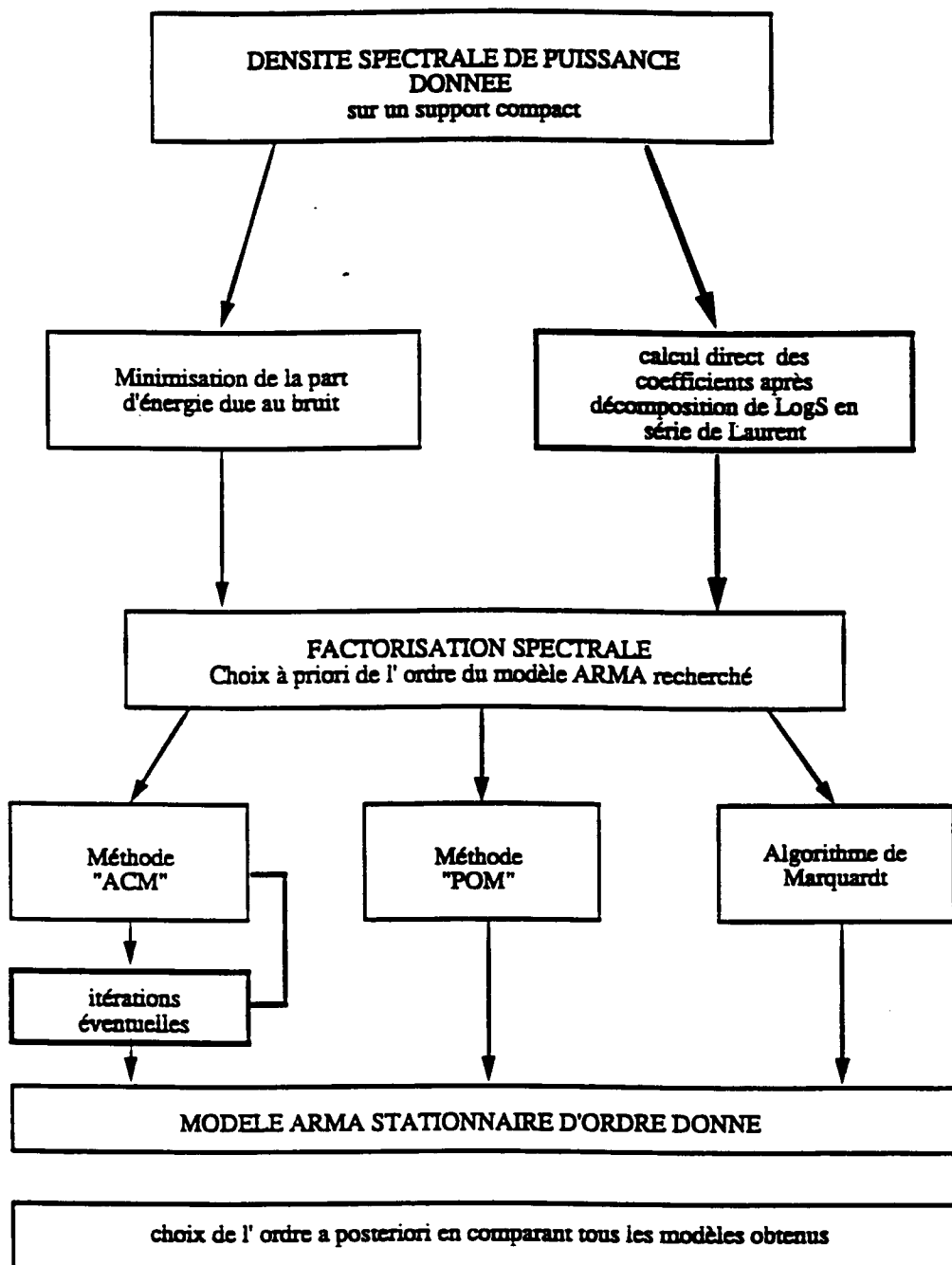
- [6] M.P.Mignolet, P.D.Spanos, Recursive simulation of stationnary multivariate random processes, Journal of Applied Mechanics (transactions of ASME) Vol.54, sept 1987
- [7] M.Shinozuka, Simulation of multivariate and multidimensional random processses, JASA Vol. 49, No 1, 1971
- [8] M.Shinozuka, Digital simulation of random processes and its applications, Journal of Sound and Vibrations 1972, 25(1)
- [9] L.E.Wittig, A.K.Sinha, Simulation of multicorrelated random processes using the FFT algorithm, JASA Vol.58, No 3, Sept. 1975

- [10] F.Poirion et C.Soize, Simulation numérique de champs vectoriels gaussiens. Modèle et simulation de la turbulence atmosphérique anisotrope.(1989) (à paraître dans La Recherche Aérospatiale)
- [11] D.Ammon, W.Wedig, The approximation and the generation of stationary vector processes, CISM No.303, Springer (1987)
- [12] P.Bernard, C.Bonnemoy; An algorithm for spectral factorization using random search techniques, publication de l'Université de Clermont II, département de Mathématiques Appliquées (1989)
- [13] R.Shibata, Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's criterion of information, Biometrika, 63 (1976)
- [14] E.J Hannan, The estimation of mixed autoregressive moving average systems,Biometrika, 56
- [15] D.W.Marquardt, An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters., Journal Soc.Ind.Appl. Math, 11 (1963)
- [16] O.Desbordes, Logiciel d'identification des caractéristiques dynamiques de structures élastiques linéaires faiblement amorties, publication de l'Association des amis de l'IMT (1987)
- [17] D.Felix, Identification et filtrage récursif d'un bruit acoustique large bande dans un écoulement turbulent en conduite, Thèse de doctorat, université d'Aix-Marseille II

Annexe A

arbre des méthodes utilisées pour déterminer le modèle arma

(les traits épais caractérisent les méthodes d'utilisation originale)



Caractéristiques numériques des différents algorithmes utilisés

<p><u>Minimisation de la part d'énergie due au bruit</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - quelques FFT à calculer - système symétrique défini positif à résoudre, de dimension typique 50x50 - erreur sur la DSP inférieure à 0,1% - temps d'exécution de l'ordre de 40s sur un microVax 	<p><u>Calcul direct de la factorisation par la décomposition de LogS en série de Laurent</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - une FFT à calculer - N exponentielles complexes à calculer - pas de système linéaire à résoudre - résultats avec une erreur relative sur la DSP inférieure à 10E-6 - temps d'exécution inférieur à 2s 	<p>Factorisation spectrale à partir d'un échantillon de la densité spectrale comprenant N points</p>
<p><u>Méthode ACM</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - quelques FFT à calculer - système symétrique positif de rang $p+q+1$ - temps d'exécution typique 10s - opérations à multiplier par le nombre d'itérations souhaitées - bons résultats, erreur relative sur la DSP inférieure à 1% 	<p><u>Méthode POM</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - quelques FFT à calculer - système non symétrique de rang p - temps d'exécution typique 5s - bons résultats, erreur relative sur la DSP inférieure à 1% 	<p><u>Algorithme de Marquardt</u></p> <p>- nécessité d'une estimation initiale des paramètres ARMA</p> <p>Pour chaque itération:</p> <ul style="list-style-type: none"> - quelques FFT à calculer - matrice non symétriques de rang $p+q+1$ à inverser - temps d'exécution typique 20s <p>On n'obtient pas toujours de bons résultats, mais le critère utilisé est le plus naturel</p> <p>Construction du modèle ARMA(p,q)</p>